

Sonderdruck

aus

**AEÜ**

**ARCHIV FÜR ELEKTRONIK UND ÜBERTRAGUNGSTECHNIK  
ELECTRONICS AND COMMUNICATION**

Band 29 (1975), Seiten 480–484

**Einfluß linearer und nichtlinearer Systeme  
auf stochastische Prozesse**

von Peter Marwedel

# Einfluß linearer und nichtlinearer Systeme auf stochastische Prozesse

von Peter Marwedel \*

Dieser Beitrag befaßt sich mit den Zusammenhängen zwischen den Autokorrelationsfunktionen (AKF) stochastischer Prozesse an Ein- und Ausgängen linearer und nichtlinearer Systeme. Die klassische Theorie für AKF 2. Ordnung wird ergänzt. Außerdem werden auf beliebige Ordnung verallgemeinerte AKF („Momentfunktionen“) eingeführt und Aussagen über die verallgemeinerten AKF nichtlinear geformter und anschließend linear gefilterter gaußscher Prozesse getroffen. Das verwendete Verfahren basiert auf der Methode der charakteristischen Funktion.

### The Influence of Linear and Nonlinear Systems upon Stochastic Processes

This contribution is concerned with the relations between the autocorrelation functions of stochastic processes at the in- and outputs of linear and nonlinear systems. The classical theory for second-order autocorrelation functions is extended. Generalized autocorrelation functions (general-order moment functions) are introduced and the general-order autocorrelation function of a Gaussian process that is passed first through a zero-memory nonlinear system, then through a linear filter is given. The procedure used is based upon the characteristic function method.

### Einleitung

Eine große Zahl analoger elektronischer Geräte enthält Teilsysteme, deren Eingangssignale statistischen Charakter haben. Für eine eingehende Beurteilung der Funktion des Gerätes ist es dann wichtig, den statistischen Charakter des Ausgangssignals, u. U. nach weiterer linearer Filterung, mathematisch erfassen zu können. Genannt seien hier z. B. Effektivwertformer mit nachfolgendem Integrationsglied. Wird ein solches Gerät von nicht-deterministischen Signalen gespeist, so muß aus sinnvollen Annahmen für die zu messende Größe eine statistische Fehlerraussage für den angezeigten Effektivwert abgeleitet werden. Häufig ist die Annahme berechtigt, daß der statistische Anteil des Eingangssignals in der Amplitude normalverteilt ist. Der Gewinnung von Eingang/Ausgang-Relationen für Teilsysteme der o. a. Art soll dieser Artikel gewidmet sein.

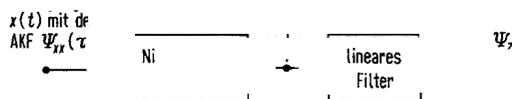


Bild 1. Betrachtetes System.

### 1. Klassischer zweidimensionaler Fall

Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Einfluß der Nichtlinearität auf die Autokorrelationsfunktion (AKF) des Rauschens.

#### 1.1. Eine fundamentale Gleichung

Die AKF des Signals  $y(t)$  ist gegeben durch

$$\Psi_{yy}(t_1, t_2) = E \{y(t_1)y(t_2)\} = E \{y_1 y_2\}, \quad (1)$$

wobei  $y_j := y(t_j) = f(x_j := x(t_j))$ . (2)

Prinzipiell ist die AKF damit ein Erwartungswert  $E$  von Funktionen der Variablen  $x_j$ , somit aus der gemeinsamen Dichte der  $x_j$  erchenbar. Die zur Erwartungswertbildung erforderlichen Integrationen erweisen sich jedoch als komplex, sie müssen für jede Funktion  $f$  neu durchgeführt werden, gestatten kaum die Berücksichtigung harmonischer Signalanteile und sind bei den im folgenden behandelten, stückweise definierten Kennlinien schwierig zu lösen. Mit Rice [1] wird daher hier ein indirekter Weg zur Bestimmung der AKF gewählt.

Wir bilden dazu zunächst die Fouriertransformierte der Funktion  $f$

$$F(ju) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jux} dx \quad (3)$$

mit dem Umkehrintegral entlang des Weges  $L$  der Fourierrücktransformation

\* Dr. P. Marwedel, Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Universität, D-23 Kiel 1, Olshausenstraße 40-60.

$$y = f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(j u) e^{j u x} dx \quad (4)$$

Die zufallsbedingte Größe  $y_j$  ergibt sich danach als

$$y_j = \frac{1}{2\pi} \int_L F(j u_j) e^{j u_j x} du_j, \quad (5)$$

wobei wir zur späteren Verwendung auch  $u$  indiziert haben. Setzen wir nun Gl. (5) in Gl. (1) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \Psi_{yy} &= E\{y_1 y_2\} \\ &= E\left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_L F(j u_1) e^{j u_1 x_1} du_1 \int_L F(j u_2) e^{j u_2 x_2} du_2 \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_L F(j u_1) \int_L F(j u_2) E\{e^{j u_1 x_1 + j u_2 x_2}\} du_1 du_2. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert im Integranden heißt charakteristische Funktion der Variablen  $x_1$  und  $x_2$  und ist gleich der (zweidimensionalen) Fouriertransformierten der gemeinsamen Dichte. Mit der Bezeichnung  $C(u_1, u_2)$  für die charakteristische Funktion ist also

$$\begin{aligned} \Psi_{yy}(t_1, t_2) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_L F(j u_1) \int_L F(j u_2) C(u_1, u_2) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Formel ist die Basis der Methode der charakteristischen Funktion.

1.2. Auswertung der Formel für Potenzkennlinien

Wir betrachten im folgenden ein additiv aus einem Sinussignal  $x_S(t)$  und gaußschem Rauschen  $x_N(t)$  zusammengesetztes Signal  $x(t)$ :

$$x(t) = x_S(t) + x_N(t). \quad (7)$$

Derartige Signale sind in der Praxis wichtig, z.B. bei der Frequenzumsetzung von Rauschvorgängen.

Um Gl. (6) anwenden zu können, wird nun die charakteristische Funktion von  $x(t)$  benötigt. Sind  $x_S(t)$  und  $x_N(t)$  voneinander statistisch unabhängig, so gilt nach einem Satz aus der Statistik für deren charakteristische Funktionen

$$C(u_1, u_2) = C_S(u_1, u_2) C_N(u_1, u_2). \quad (8)$$

Die charakteristische Funktion harmonischer Signale

$$x_S(t) = P \cos(pt + \varphi) \quad (9)$$

lautet ( $J_0$ : Besselfunktion)

$$C_S(u_1, u_2) = J_0(P\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + 2u_1 u_2 \cos p\tau) \quad (10)$$

Die zweidimensionale charakteristische Funktion von gaußschem Rauschen ist, als Fouriertransformierte der Dichtefunktion,

$$\begin{aligned} C_N(u_1, u_2) &= \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \Psi_{xx}(0)(u_1^2 + u_2^2) - \Psi_{xx}(\tau) u_1 u_2\right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Aus den Gl. (6), (8), (10) und (11) erhält man unter Entwicklung der Bessel- [1] und der Exponentialfunktion

$$\Psi_{yy}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Psi_{xx}^k(\tau) h_{nk}^2 \varepsilon_n \cos n p \tau \quad (12)$$

mit  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$  für  $n \geq 2$ ,

$$h_{nk} = \frac{j^{n+k}}{2\pi} \int_L F(j u) u^k J_n(Pu) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \Psi_{xx}(0) u^2\right\} du. \quad (15)$$

Die Berechnung von  $\Psi_{yy}$  wurde damit von Rice auf die Berechnung der  $h_{nk}$  zurückgeführt. Probleme ergeben sich bei dem bislang benutzten Verfahren bei der Verwendung von im Negativen nicht verschwindenden Kennlinien. Betrachten wir dazu Gl. (3). Das Fourierintegral ist konvergent für

$$\text{Im}(u) < -c_0 < 0,$$

wenn ein  $x_0$  und ein  $c_1$  existieren, so daß

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle } x < x_0$$

und  $f(x)$  asymptotisch kleiner ist als  $e^{c_1 x}$  mit  $c_1 < c_0$ . Für die wenigsten Kennlinien existiert jedoch ein  $x_0$  mit der oben geforderten Eigenschaft. Zur Sicherstellung der Konvergenz muß daher eine allgemeine Kennlinie in zwei Teile aufgespalten werden, zweckmäßigerweise in den positiven und den negativen ( $x_0 = 0$ ), so daß man hat:

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ f^-(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$F^+(j u) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-j u x} dx$$

$$F^-(j u) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-j u x} dx$$

$$F(j u) = F^+(j u) + F^-(j u)$$

Speziell für

$$f(x) = \begin{cases} \omega & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (16)$$

und dazu ordinaten- oder nullpunktsymmetrischer Fortsetzung im Negativen wurde in [2] gezeigt, daß die Aufspaltung in  $F^+$  und  $F^-$  sowie in getrennte Integrationswege (entlang  $L_+$  und  $L_-$  im Bild 2) in Gl. (15) nicht durchgeführt zu werden braucht, sondern daß sich diese auf Grund der Symmetrien auf die Wege  $L_k$  bzw.  $L_a$  reduzieren. (Das Integral über  $L_a$  ist hierbei noch mit zwei zu multiplizieren.)

Das Kreisintegral entlang  $L_k$  gilt für Kennlinien, die geschlossen in der Form  $f(x) = x^n$  dargestellt werden können, und das sogenannte Hauptwertin-



Bild 2. Wege  $L$  der Fourier-Rücktransformat

tegral entlang der reellen Achse  $L_a$  gilt für im Negativen an der Abszisse geklappte Kennlinien (z. B. für Zweiweggleichrichter ungerader Ordnung).

Mit der Fouriertransformierten der Potenzkennlinien

$$F(ju) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{(ju)^{\nu+1}}$$

erhält man für Gl. (15) nach Entwicklung der Besselfunktion, ohne den oben erwähnten Faktor zwei

$$h_{nk}^{(\nu)} = \frac{\Gamma(\nu + 1) j^{n+k-\nu-1}}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(P/2)^{n+2j} (-1)^j}{j! \Gamma(n + j + 1)} \cdot I_{k,a} \quad (17)$$

$$I_{k,a} = \int_{L_{k,a}} u^{k+n-\nu-1+2j} \exp\{-\frac{1}{2} \Psi_{xx}(0) u^2\} du \quad (18)$$

Eine Residuenrechnung ergibt für das Kreisintegral

$$I_k = \begin{cases} \frac{2\pi j (-1)^{-\lambda}}{(\Psi_{xx}(0)/2)^\lambda \Gamma(1-\lambda)} \text{ für } \lambda = \frac{k+n-\nu}{2} + j \text{ ganz } \& \leq 0 \\ 0 \text{ für } \lambda \text{ halbzahlig oder ganzzahlig } \& > 0. \end{cases} \quad (19)$$

Mit Gl. (17) und den Abkürzungen

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (20)$$

$${}_1F_1[a, b; x] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j}{(b)_j j!} x^j \quad (21)$$

folgt damit für die geschlossen darstellbaren Kennlinien ( $\Psi_0 = \Psi_{xx}(0)$ )

$$h_{nk}^{(\nu)} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\nu + 1) \left(\frac{P^2}{2\Psi_0}\right)^{n/2} \left(\frac{\Psi_0}{2}\right)^{(\nu-k)/2}}{\Gamma(n + 1) \Gamma\left(1 + \frac{\nu - k - n}{2}\right)} \cdot \\ {}_1F_1\left[\frac{k+n-\nu}{2}, n; -\frac{P^2}{2\Psi_0}\right] \end{cases} \quad (22)$$

für  $(k+n-\nu)$  gerade,  
0 für  $(k+n-\nu)$  ungerade

Das Integral entlang  $L_a$

$$I_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^{k+n-\nu+2j-1} \exp(-\frac{1}{2} \Psi_0 u^2) du + \int_{\varepsilon}^{\infty} u^{k+n-\nu+2j-1} \exp(-\Psi_0 u^2) du \right] \quad (23)$$

ist Null für ungerade Exponenten von  $u$ . Für gerade positive Exponenten erhält man nach elementarer Rechnung wieder den oberen Ausdruck aus Gl. (19). Für gerade negative Exponenten liefert eine Residuenrechnung ebenfalls den oberen Ausdruck aus Gl. (19).

Faßt man die bisherigen Ergebnisse zusammen, so erhält man

$$a h_{nk}^{(\nu)} = \begin{cases} 2 h_{nk}^{(\nu)} & \text{für } (k+n) \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } (k+n) \text{ gerade} \end{cases} \quad (24)$$

$$s h_{nk}^{(\nu)} = \begin{cases} 2 h_{nk}^{(\nu)} & \text{für } (k+n) \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } (k+n) \text{ ungerade} \end{cases} \quad (25)$$

mit

$$h_{nk}^{(\nu)} = \frac{\nu! \left(\frac{P^2}{2\Psi_0}\right)^\nu \left(\frac{\Psi_0}{2}\right)^{(\nu-k)/2}}{n! 2^\nu \Gamma\left(1 + \frac{\nu - k - n}{2}\right)} {}_1F_1\left[\frac{k+n-\nu}{2}, n+1; -\frac{P^2}{2\Psi_0}\right] \quad (26)$$

Die Formel (24) liefert die für anti- (bzw. nullpunkts-) symmetrische  $\nu$ -te Potenzkennlinien in Gl. (12) einzusetzenden  $h$ -Koeffizienten, Gl. (25) diejenigen für ordinatensymmetrische (oder einfach symmetrische) Kennlinien. Gl. (26) gilt für im Negativen verschwindende Halbwellenkennlinien.

Die Koeffizienten  $h_{nk}$  kann man als Amplitude des Mischproduktes der  $n$ -ten Oberwelle des harmonischen Signals mit der  $k$ -ten Faltung des Rauschspektrums mit sich selbst anschaulich interpretieren [2].

Mit Hilfe eines Rechenprogrammes wurden die Formeln angewendet, um die spektrale Rauschleistungsverteilung innerhalb des Kieler Vielkanalspektrometers zur Beobachtung der solaren Radiostrahlung zu bestimmen. Bislang in [1] veröffentlichte Teilergebnisse, wie die Formel (26), konnten bestätigt werden, ebenso die empirisch (ohne die Begründung über die Fouriertransformation) gefundenen Integrationswege  $L_k$ . Bei dem in [3] behandelten Fall des idealen Begrenzers konnte zwar das Ergebnis, nicht jedoch der verwendete Integrationsweg bestätigt werden.

### 1.3. Approximation durch Polynomkennlinien

Wegen der Linearität der benutzten Fouriertransformation kann man nun noch auf einfache Weise die Ausgangs-AKF nach Polynomkennlinien

$$f^+(x) = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} a_\nu x^\nu & \text{für} \\ 0 & \text{für} \end{cases}$$

berechnen. Wir erkennen dazu, daß Gl. (15) linear bezüglich der Kennlinie  $f(x)$  ist. Für diese Kennlinien erhält man daher einfach

$$h_{nk} = \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} a_\nu h_{nk}^{(\nu)}$$

Damit ist es möglich, die AKF nach praktisch jeder beliebigen (ordinaten- oder nullpunktssymmetrischen oder einseitigen) Transformation zu bestimmen, indem die betrachtete Kennlinie zunächst durch ein Polynom approximiert wird.

Diese Berechnungsmöglichkeit ist scheinbar bislang nicht veröffentlicht worden, obwohl sich Andeutungen dafür finden [4], [5].

## 2. Allgemeiner $n$ -dimensionaler Fall

Während wir bislang von „Signalen“  $x(t)$ ,  $y(t)$ , usw. gesprochen haben, wollen wir im folgenden genauer den Begriff des stochastischen Prozesses verwenden, unter dem wir eine Menge  $\{x(t)\}$  von

gleichartigen Signalen  $x(t)$  verstehen wollen. Wir werden stationär-ergodische Prozesse voraussetzen, ohne dies immer neu zu erwähnen.

Eine gute Charakterisierung stochastischer Prozesse liefern die verallgemeinerten Korrelationsfunktionen oder „Momentfunktionen“. Diese sind definiert als Erwartungswert des  $n$ -fachen Produkts der Signalvariablen, genommen an unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_j$ :

$$\Psi_{zn}(t_1, \dots, t_n) = E \{z(t_1)z(t_2) \dots z(t_n)\}. \quad (27)$$

Momentfunktionen können zur Approximation  $n$ -dimensionaler Dichten dienen. Die gewöhnlichen Momente, d.h. die Erwartungswerte der Potenzen der Signalvariablen, ergeben sich als Sonderfall für sämtlich gleiche Zeitpunkte.

### 2.1. Verknüpfung von Momentfunktionen durch lineare Systeme

Die Beziehungen zwischen den Momentfunktionen an Ein- und Ausgängen linearer Filter,  $\Psi_{yn}$  und  $\Psi_{zn}$ , gewinnt man über das Faltungsintegral

$$z(t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t_j - \tau) d\tau. \quad (28)$$

Aus Gl. (27) und (28) folgt

$$\Psi_{zn}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) \dots h(\tau_n) \cdot E \{y(t_1 - \tau_1) \dots y(t_n - \tau_n)\} d\tau_1 \dots d\tau_n$$

und bei vorausgesetzter Stationarität

$$\Psi_{zn}(t'_1, \dots, t'_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) \dots h(\tau_n) \cdot \Psi_{yn}(t'_1 - \tau_1 + \tau_n, \dots, t'_{n-1} - \tau_{n-1} + \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (29)$$

### 2.2. Momentfunktionen nichtlinear geformter gaußscher Prozesse

Mittels Gl. (29) kann man weitgehende Aussagen über den statistischen Charakter von Prozessen an den Ausgängen linearer Filter machen, z.B. ihre Dichte approximieren. Um diese Formeln auszunutzen, müssen aber zunächst einmal Momentfunktionen wichtiger Prozesse bekannt sein. Im allgemeinen wird man über die Momentfunktionen  $n$ -ter Ordnung keine Aussagen haben. Anders bei Prozessen, die durch nichtlineare Formung aus gaußschen Prozessen entstanden sind. Deren Mo-

nichtgaußscher Prozeß bei zunehmender Bandbegrenzung gegen einen gaußschen konvergiert. Diese Eigenschaft nichtgaußscher Prozesse wird meist unter Berufung auf den Zentralen Grenzwertsatz nur qualitativ erklärt. Darüber hinaus stehen mit der Kenntnis der Momentfunktionen von  $\{z(t)\}$  auch detaillierte Aussagen über eine große Klasse von Prozessen zur Verfügung.

Die verallgemeinerte AKF des Prozesses  $\{y(t)\}$  erhält man als Verallgemeinerung von Gl. (6), indem man in die Definition (27) wiederum das Fourierumkehrintegral (3) einsetzt, zu

$$\Psi_{yn} = (2\pi)^n \int_L \dots \int_L F(ju_1) \dots F(ju_n) \cdot C(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n \quad (30)$$

Die  $n$ -dimensionale charakteristische Funktion eines gaußschen Prozesses ist

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left( \sum_{r,s} \mu_{rs} u_r u_s \right) \quad (31)$$

$$\text{mit} \quad \mu_{rs} = \Psi_{xx}(t_r - t_s). \quad (32)$$

Man sieht, daß die charakteristische Funktion für beliebige  $n$  bereits durch die AKF bestimmt ist. Setzt man Gl. (31) in Gl. (30) ein, so erhält man nach längerer Rechnung, unter Entwicklung der Exponentialfunktionen,

$$\Psi_{yn} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{k_1, a, \dots, k_{v,w}, \dots, k_{n-1, n} \\ v, w = 1, \dots, n; v < w}} \prod_{\substack{r, s=1 \\ r < s}}^n \frac{(-\mu_{rs})^{k_{r,s}}}{k_{r,s}!} \prod_{i=1}^n h_0 \left( t_{\sum k_{r,s} + \sum k_{i,r}} \right). \quad (33)$$

Die  $n$ -dimensionalen Momentfunktionen sind damit dargestellt als  $n/2 \cdot (n-1)$ -fache Summation über die im Abschnitt 1.2 eingeführten  $h$ -Koeffizienten und die  $\mu_{rs}$ , die sich aus der AKF des Prozesses  $\{x(t)\}$  gewinnen lassen. (Der Klammerinhalt ist Index.)

Der Spezialfall  $n = 3$  z.B. ergibt

$$\Psi_{y3} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mu_{12})^j}{j!} \frac{(\mu_{13})^k}{k!} \frac{(\mu_{23})^l}{l!} \cdot h_{0j+k} h_{0j+l} h_{0l+k}. \quad (34)$$

### 2.3. Momentfunktionen gefilterter nichtgaußscher Prozesse

Die Kenntnis der Momentfunktionen (33) kann jetzt zusammen mit Gl. (29) zur Berechnung der Momentfunktionen von  $\{z(t)\}$  ausgenutzt werden.

Während  $\Psi_{zn}$  im Prinzip mit den vorhandenen Gl. (29) und (33) — zumindest numerisch — berechnet werden kann, wird zur rechentechnischen Vereinfachung angenommen:

1. das lineare Filter hat den Übertragungsfaktor

$$H(\omega_i) = \exp(-\omega_i^2 / 8\pi^2 a^2), \quad (35)$$

2. die Eingangs-AKF lautet

$$\Psi_{xx}(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \exp(-2\pi^2 b^2 \tau^2)$$

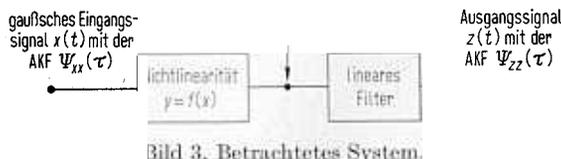


Bild 3. Betrachtetes System.

mentfunktionen müssen allein aus dem Spektrum bzw. der AKF des gaußschen Prozesses folgen, da diese einen gaußschen Prozeß vollständig charakterisieren. Am Prozeß  $\{z(t)\}$  (siehe Bild 3) muß dann z.B. beobachtet werden können, wie ein zunächst

Die etwas längere Rechnung in [2] ergibt

$$\Psi_{2n}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{k_{v,w}=0 \\ v,w=1, \dots, n; v < w}} \prod_{r,s=1}^n \frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2}} b)^{k_{r,s}}}{k_{r,s}!} \sqrt{\frac{|\beta_{pq}|}{|\alpha'_{pq}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n-1} \beta_{pq} \tau_p \tau_q\right) h_0\left(\sum_{r=1}^{t-1} k_{r,t} + \sum_{s=t+1}^n k_{t,s}\right) \quad (37)$$

$$\alpha_{pq} = 4\pi^2 b^2 \begin{cases} \sum_{t=1}^n k_{p,t} & \text{für } p = q \\ t \neq p \\ -k_{p,q} & \text{für } p \neq q, \end{cases}$$

$\alpha'_{pq}$  sind die Elemente einer beliebigen kleinsten Untermatrix von  $\alpha_{pq}$  mit dem Rang von  $\alpha_{pq}$ ,

$$\beta_{pq} = \alpha'_{pq} + \frac{1 + \delta_{pq}}{4\pi^2 a^2}.$$

Hoch- und tiefgestellte Indizes unterscheiden die Elemente der inversen Matrizen. Die Summe in der Exponentialfunktion läuft nur über ein bestimmtes  $p$  oder  $q$ , wenn die Zeilen (Spalten) von  $\alpha_{pq}$  mit dem entsprechenden Index in  $\alpha_{pq}$  enthalten sind.

2.4. Anwendung: Approximative Verteilungsbestimmung gefilterter nichtgaußer Prozesse

Falls alle  $\tau_j$  gleich Null sind, gibt Gl. (37) die gewöhnlichen Momente am Ausgang des Systems nach Bild 3 an. An einer PDP-10-Rechenanlage können im time-sharing-Betrieb fünf Momente etwa innerhalb einer Viertelstunde mit einem Algol-Rechenprogramm gerechnet werden. Bereits vier

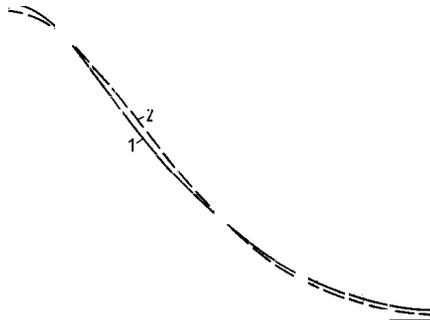


Bild 4. Verteilung nach Zweiweggleichrichtung; Eingangsleistung = 1; Kurve 1: Approximation, Ausgangsbandbreite = 10 × Eingangsbandbreite, Kurve 2: exakte Funktion, unendliche Ausgangsbandbreite.

Momente reichen für eine grobe Approximation der eindimensionalen Dichte aus, wenn angepaßte Funktionensysteme verwendet werden [6].

Bild 4 zeigt die mit einem Laguerre-Funktionensystem berechnete Verteilung für einen linearen Zweiweggleichrichter mit breitem Ausgangsfilter, sowie zum Vergleich die wahre Verteilung für ein unendlich breites Ausgangsfilter.

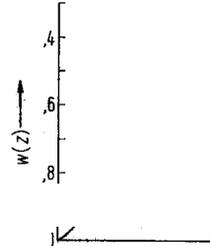


Bild 5. Verteilung nach Einweggleichrichtung und Bandbegrenzung; Eingangsleistung = 1; Ausgangsbandbreite = 0,1 × Eingangsbandbreite.

Bild 5 zeigt die nach dem Edgeworth-Verfahren [6] gewonnene Verteilung für einen linearen Einweggleichrichter und ein gegenüber der spektralen Eingangsbandbreite um den Faktor zehn schmäleres Ausgangsfilter. Die vorhandene Tendenz zur Normalverteilung ist zu erkennen.

Für die Unterstützung meiner Arbeit danke ich Herrn Dr. Zimmermann und den Mitarbeitern der Radiosternwarte Kiel.

(Eingegangen am 25. Januar 1975.)

Schrifttum

- [1] Rice, S. O., Mathematical analysis of random noise. Bell Syst. tech. J. 23 und 24 [1945], 1–162; nachgedruckt in: N. Wax (Herausgeber), Selected papers, on noise and stochastic processes. Dover Publications, New York 1954.
- [2] Marwedel, P., Entwicklung und Anwendung von Methoden zur stochastischen Behandlung von linearen und nichtlinearen Systemen am Beispiel eines Radiofrequenzspektrometers. Dissertation Universität Kiel, 1974.
- [3] Deutsch, R., Nonlinear transformation of random processes. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs 1962.
- [4] Middleton, D., The response of biased, saturated linear and quadratic rectifiers to random noise. J. appl. Phys. 17 [1946], 778–800.
- [5] Baum, R. F., The correlation function of gaussian noise passed through nonlinear devices. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. IT-15 [1969], 448–456.
- [6] Cramer, H., Mathematical methods of statistics. Princeton University Press, Princeton 1954.