Layout-Synthese
- Globale Verdrahtung -

Peter Marwedel
Universität Dortmund, Informatik 12

2008/07/05

Globale Verdrahtung, Allgemeines zur Verdrahtung

Einige graphentheoretische Begriffe:

Def.: Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Falls gilt:
$\forall (v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E$, so heißt der Graph **ungerichtet** und sonst **gerichtet**.

Def.: Ein **kantengewichteter Graph** ist ein Tripel (V, E, w), wobei (V, E) ein Graph ist und w eine Abbildung $w : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Def.: Ein **Pfad** von $x \in V$ nach $y \in V$ ist eine Folge $(v_1, v_2, ..., v_n)$ mit $v_1 = x$, $v_n = y$ und $\forall_{1 \leq i \leq n-1} : (v_i, v_{i+1}) \in E$.

Im Folgenden: ungerichtete Graphen.

Def.: Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn zwischen je zwei Knoten ein Pfad existiert.

Def.: Ein Graph heißt **zyklenfrei**, wenn zwischen je zwei Knoten nicht mehr als ein Pfad existiert.

Bäume

Def.: Ein (freier) **Baum** ist ein zusammenhängender, zyklenfreier Graph.

Def.: Ein **Baum mit Wurzel** (engl. *rooted tree*) ist ein freier Baum mit einem ausgezeichneten Knoten, der Wurzel.

Verdrahtungsnetze zusammenhängend & zyklenfrei $\rightarrow$ Verdrahtungsnetze bilden Bäume.

Def.: Ein **Spannbaum** (engl. *spanning tree*) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein (freier) Baum $B' = (V', E')$ mit $V = V'$ und $E' \subseteq E$.

Def.: Ein **minimaler Spannbaum** eines kantengewichteten Graphen G ist ein Spannbaum des Graphen G, der unter allen möglichen Spannbäumen die minimale Summe der Kantengewichte besitzt.

Algorithmen von Prim und von Kruskål.

Steiner-Bäume

Def.: Ein **Steiner-Baum** eines Graphen G=(V,E) zur Knotenmenge $S \subseteq V$ ist ein Baum B=(V',E') mit $E' \subseteq E$ und $S \subseteq V' \subseteq V$.

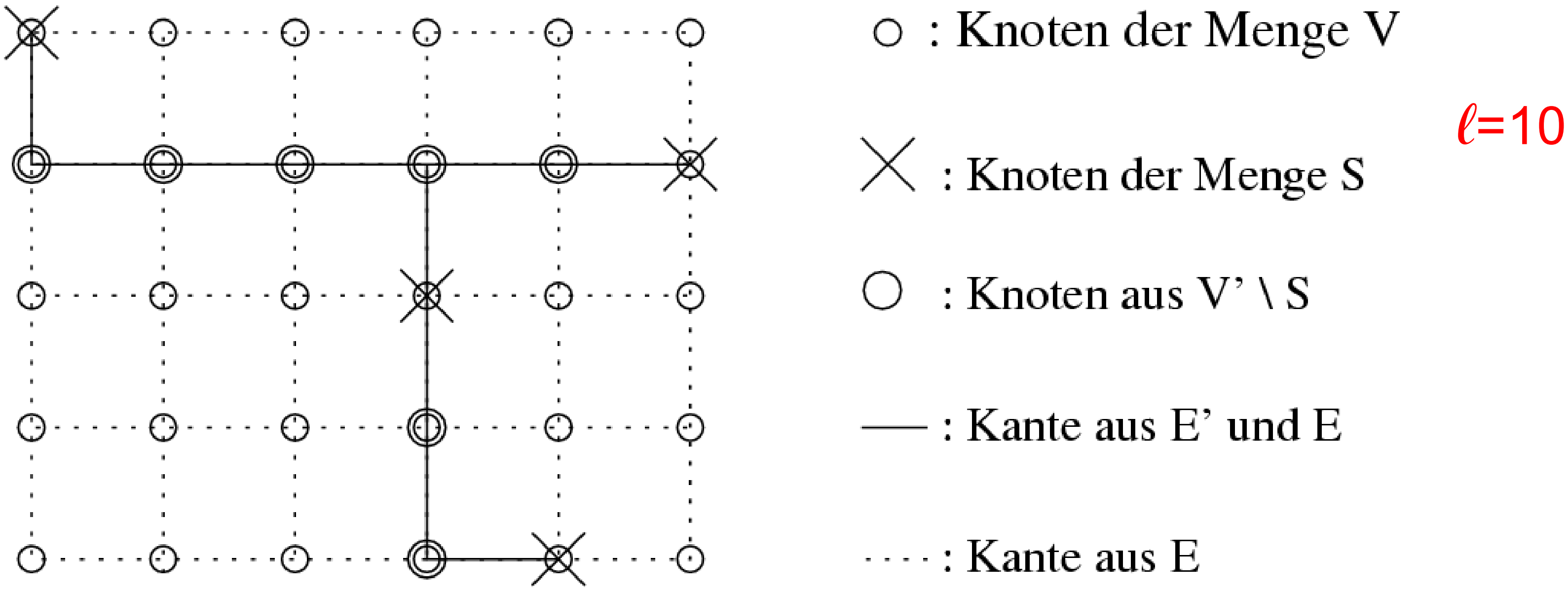
Def.: Ein **minimaler Steiner-Baum** eines kantengewichteten Graphen G zu einer Knotenmenge S ist ein Steiner-Baum, der unter allen möglichen Steiner-Bäumen die minimale Summe der Kantengewichte besitzt.

2 Fälle der Bestimmung minimaler Steiner-Bäume

1. Manhattan-Abstandsmaß

Def.: Der Manhattan–Abstand zweier Punkte A und B in der Ebene mit den Koordinaten (x_A, y_A) bzw. (x_B, y_B) ist definiert als $d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$.

Minimaler Steiner-Baum für ein Rechteckraster:

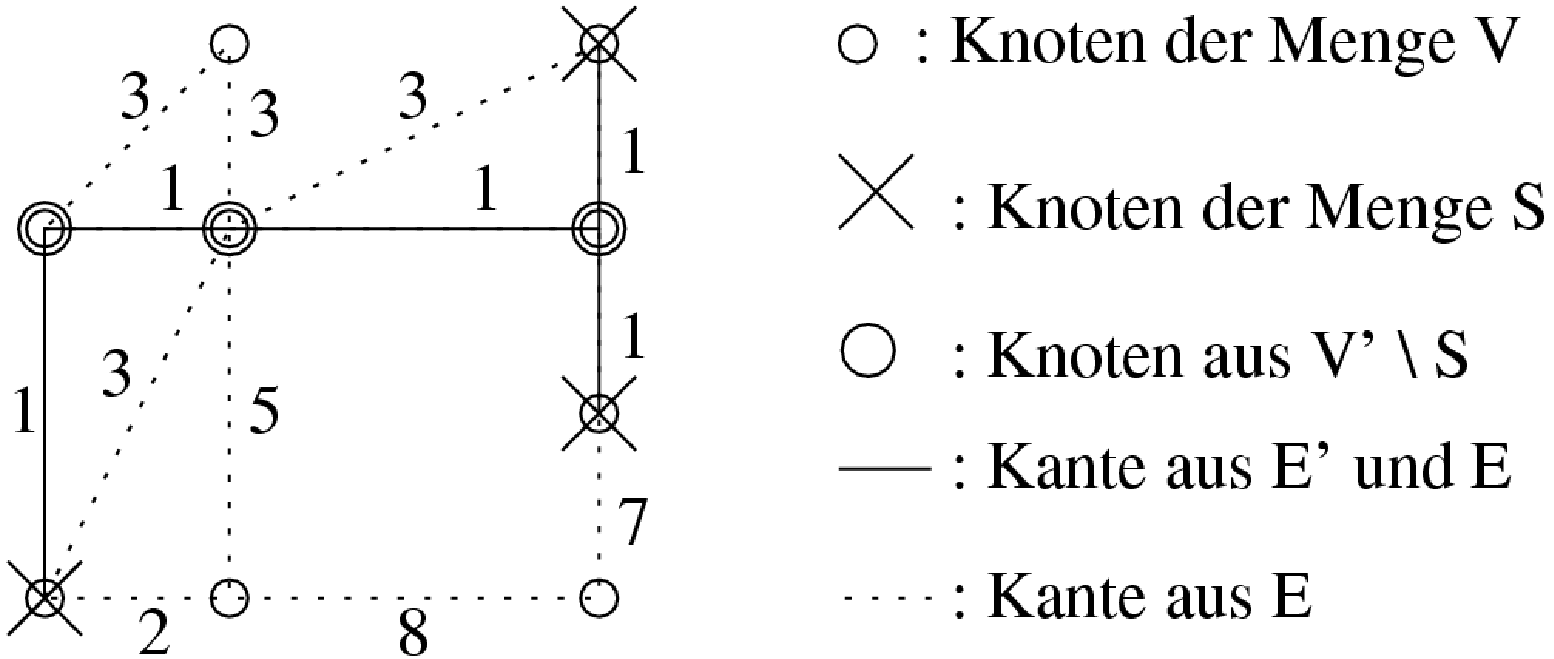


Steiner tree on graph problem

2. Beliebiges Abstandsmaß in Graphen: Steiner tree on graph problem (STOGP)

Allgemeines Minimierungsproblem auf Graphen.

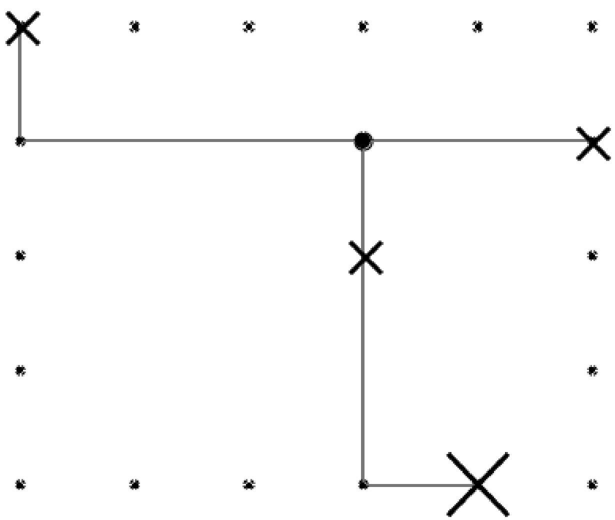
Beispiel:



Beliebige Kantengewichte zulässig.

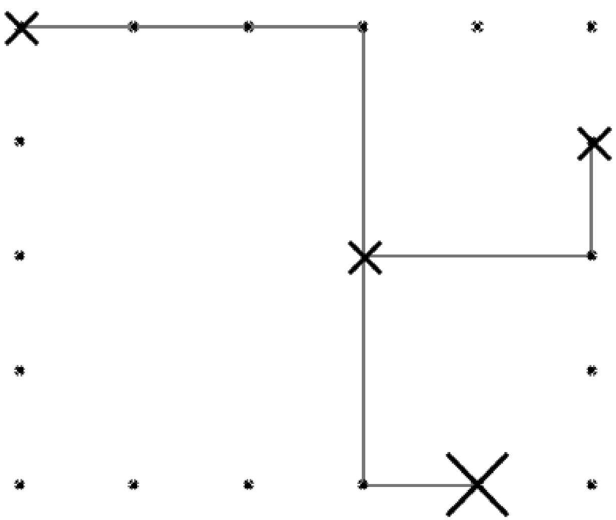
Alternativen für die Verdrahtung

1. Minimaler Steinerbaum



ℓ=10

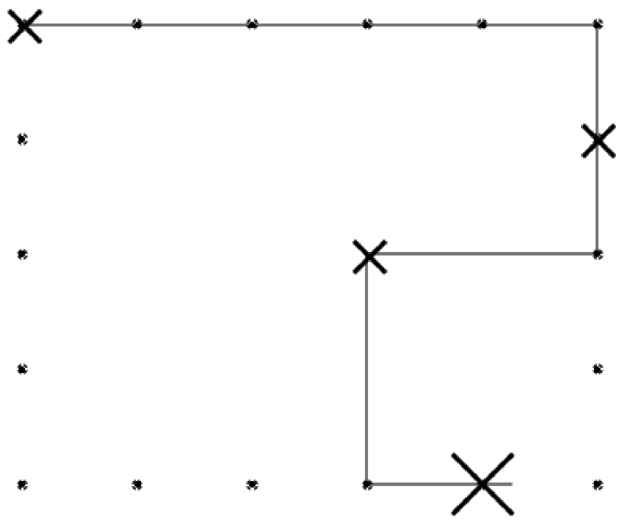
2. Minimaler Spannbaum



ℓ=11

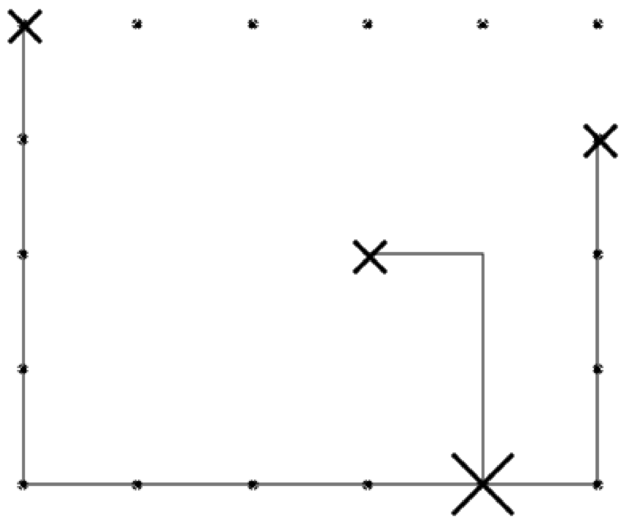
Alternativen für die Verdrahtung (2)

3. Minimale Ketten



ℓ=12

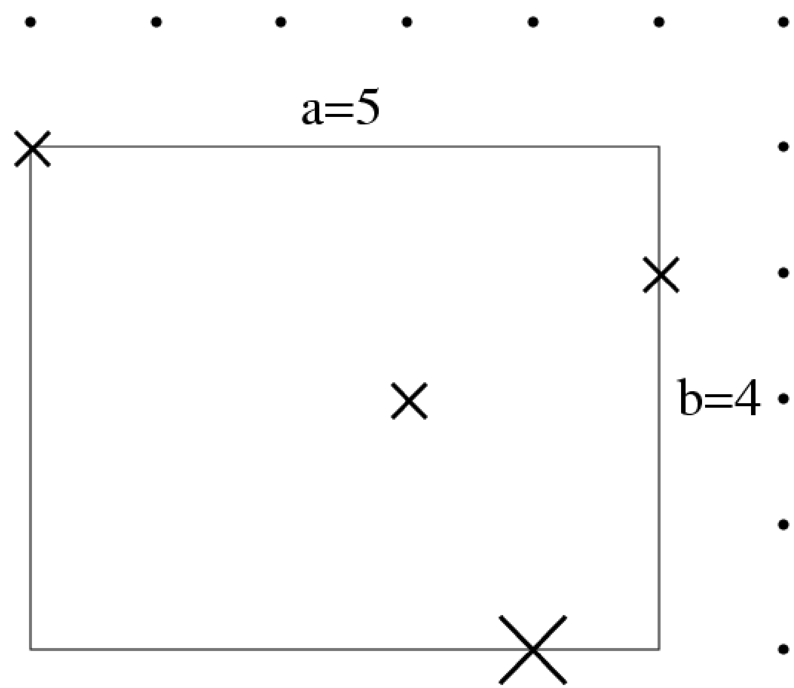
4. Minimale direkte Ein/Ausgangsverbindung:



ℓ=15

Methode des halben Umfangs

Die Länge der Verdrahtung wird durch die Kantensumme des kleinsten Rechtecks, in dem alle zu verdrahtenden Knoten liegen, abgeschätzt.



$$\frac{U}{\text{٢}} = \text{٩}$$

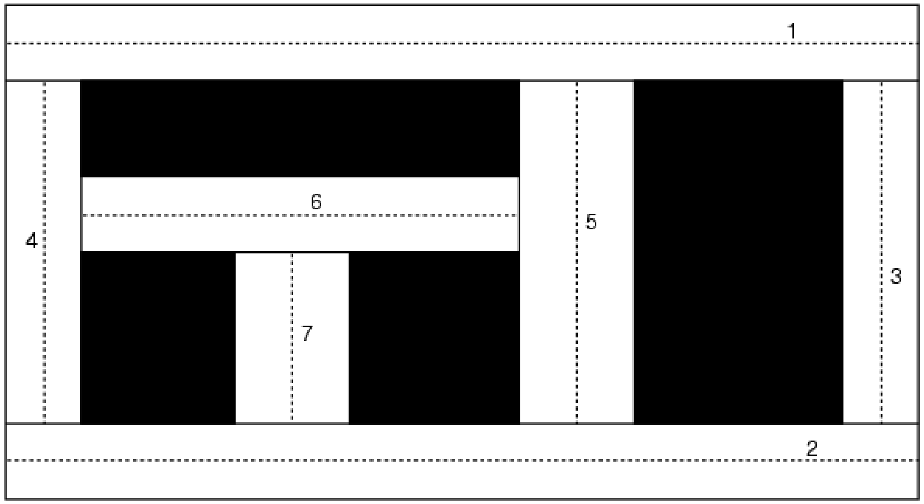
Bei 2- und 3-Punkt-Netzen ist die Abschätzung exakt gleich der Länge des minimalen Steiner–Baumes (Übungsaufgabe!).

Problemstellung der globalen Verdrahtung

- Verdrahtungs-Algorithmen, die eine detaillierte Verdrahtung vornehmen, sind nicht geeignet, global über ein ganzes Chip mit z.B. einer Million Transistoren angewandt zu werden.
- Daher wird zwischen der Platzierung und der detaillierten Verdrahtung, wie sie im nächsten Abschnitt vorgestellt werden wird, meist ein weiterer Schritt eingefügt.
- Dieser Schritt heißt **globale Verdrahtung** oder **globales Routing** (engl. *global routing*). In diesem Schritt werden die Netze einer Menge von sog. **Verdrahtungsregionen** zugeordnet.

Verdrahtungsregionen: Kanäle

Mögliche Einteilung einer Fläche in Verdrahtungsregionen:

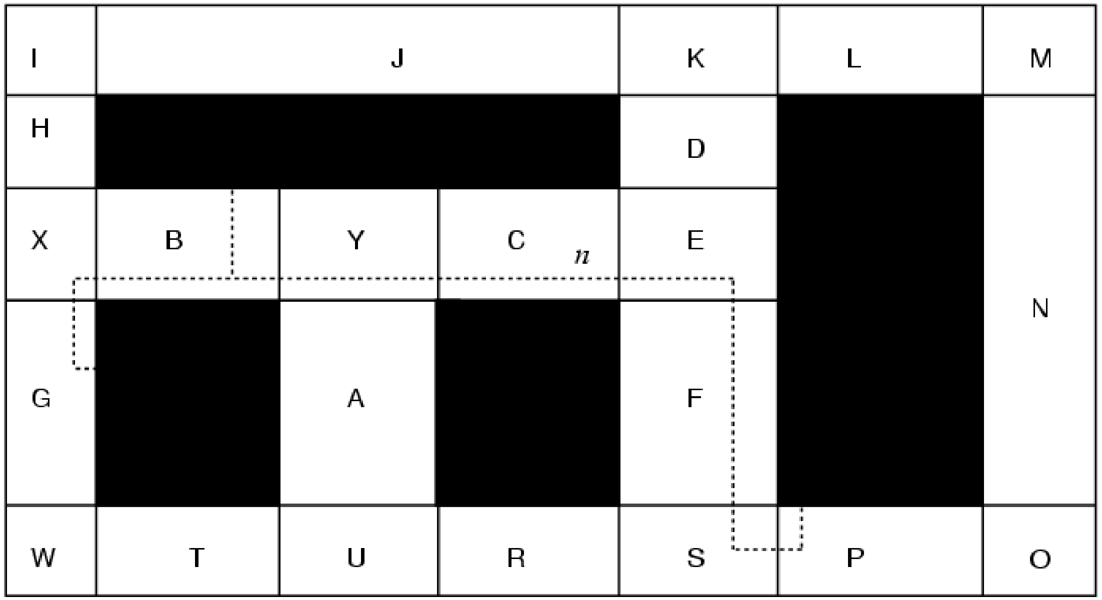


Einteilung könnte durch fortgesetztes Schneiden der Fläche entstanden sein.

Zahlen: mögliche Reihenfolge des Schneidens. Jede Schnittlinie führt zu einem Rechteck, in dem eine Verdrahtung möglich ist. Bereiche heißen **Kanäle**. Die Kanäle der Abbildung erstrecken sich über die volle Länge der entsprechenden Flächenschnitte.

Minikanäle

Minikanäle sind Unterteilungen von Kanälen mit homogenem Rand:



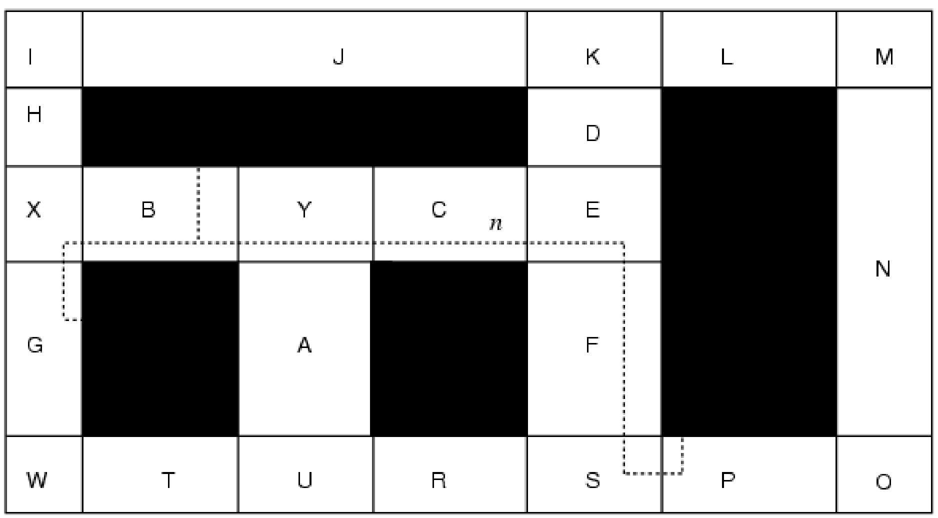
In der globalen Verdrahtung soll festgelegt werden, durch welche der Minikanäle z.B. die Verdrahtung der Netze zu führen ist.

→ Abstraktion durch Nachbarschaftsgraphen

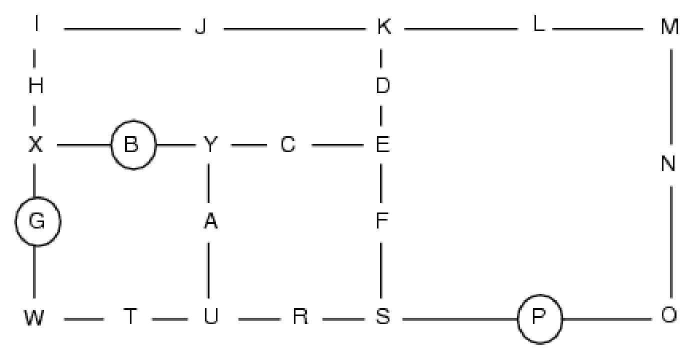
Nachbarschaftsgraphen

Def.: Ein **Nachbarschaftsgraph** (engl. *regions adjacency graph*) ist ein ungerichteter Graph, der für jede Verdrahtungsregion genau einen Knoten enthält. Zwei Knoten sind genau dann mit einer Kante verbunden, wenn die entsprechenden Verdrahtungsregionen benachbart sind.

Minikanäle und Nachbarschaftsgraph:



In einer anderen möglichen Definition werden die Kanäle als Kanten und die Zellen als Knoten modelliert



→ Problem der Verdrahtung eines Netzes führt auf das STOGP

Steiner tree on graph - Problem (STOGP)

Das allgemeine STOGP ist NP–hart [Garey/Johnson79].

Zwei Spezialfälle sind effizienter lösbar:

1. Im Spezialfall $S = V$ fällt das STOGP mit dem Problem der Bestimmung des minimalen Spannbaumes zusammen.
2. Im Spezialfall einer zweielementigen Menge S entsteht das Problem der Bestimmung des kürzesten Weges zwischen eben diesen beiden Knoten im Graphen. Dieser Spezialfall kann z.B. mittels des Algorithmus von Dijkstra [Dij59,Aho74] effizient gelöst werden.

Def.:

$$\forall v, v' \in V : \ell(v, v') := \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad v = v' \\ w(e) & \text{, falls} \quad e = (v, v') \in E \\ \infty & \text{, sonst} \end{cases}$$

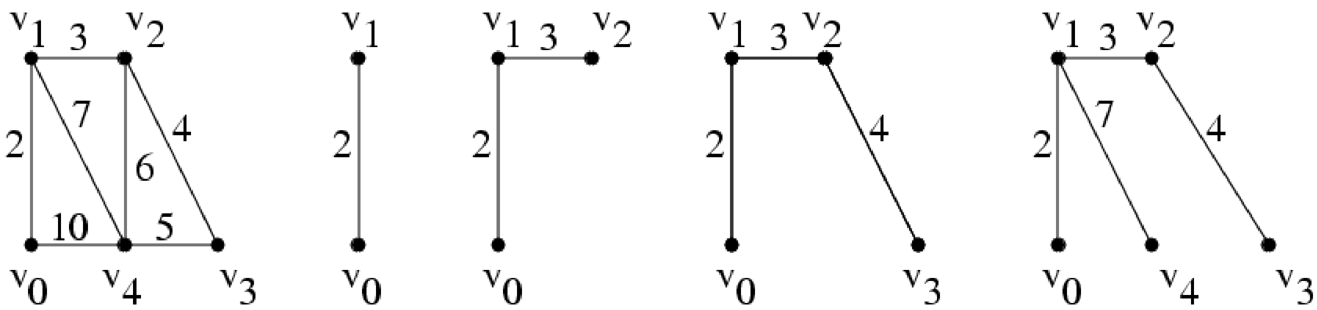
Heuristiken zur Lösung des Problems

1. Dijkstra's Algorithmus

Kürzeste Wege zwischen einem festen Knoten v_0 und allen übrigen Knoten v eines Graphen:

$S' := \{v_0\}$;
$D[v_0] := 0$;
FOR each $v \in V - \{v_0\}$ DO $D[v] := \ell(v_0, v)$;
WHILE $S' \neq V$ DO (*''Expansion''*)
  BEGIN
    Wähle Knoten $x \in V - S'$ mit $D[x]$ ist minimal;
    $S' := S' \cup \{x\}$;
    FOR each $v \in V - S'$ DO
      $D[v] :=$ min $(D[v], D[x] + \ell(x, v))$
  END; (*$D[v]$ enthält Abstand zwischen v_0 und v*)

Beispiel



ITERATION	S'	x	$D[x]$	$D[v_1]$	$D[v_2]$	$D[v_3]$	$D[v_4]$
–	v_0	–	–	2	∞	∞	10
1	$\{v_0, v_1\}$	v_1	2	2	5	∞	9
2	$\{v_0 - v_2\}$	v_2	5	2	5	9	9
3	$\{v_0 - v_3\}$	v_3	9	2	5	9	9
4	$\{v_0 - v_4\}$	v_4	9	2	5	9	9

Bei schnellem Zugriff auf den Knoten x mit minimalem Abstand $D[x]$ mit *Fibonacci-Heaps* nach Fredman und Tarjan [Fredman, 1987].

Komplexität von $O(|E| + |V| log |V|)$ [Lengauer, 1986].

2. *Single component growth* - Algorithmus

Für $|S| > 2$: zunächst kürzesten Weg zwischen 2 Punkten bestimmen. Weg bildet temporären Graphen G_1.

Dann kürzesten Weg zwischen G_1 und drittem Knoten bestimmen. (Erweiterung von Dijkstra's Algorithmus)

Fortsetzung mit viertem, fünften usw. Knoten.

Algorithmus:

IF $(|S| < 2)$ THEN RETURN;

$G_1 := (\{s\}, \emptyset, w)$ mit $s \in S$ (irgendein $s \in S$);

$S' := \{s\}$;

WHILE $S' \neq S$ DO

BEGIN

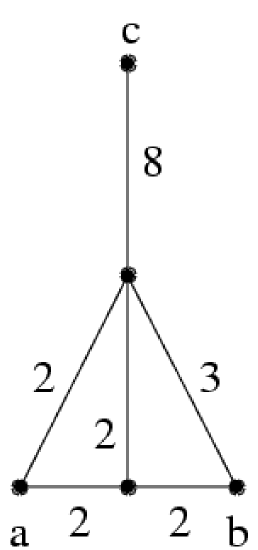
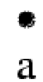
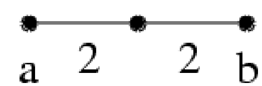
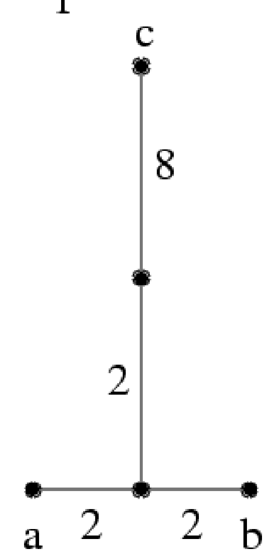
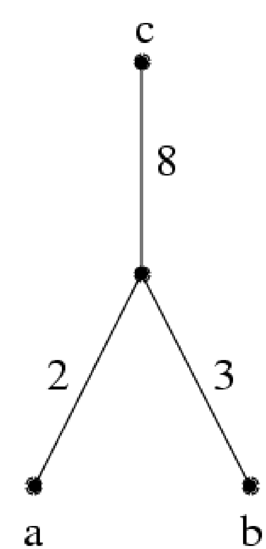
expandiere G_1 bis ein Knoten $t \in S - S'$ erreicht ist;

$G_1 := G_1 \cup$ (irgendein) kürzester Weg von S' nach t;

$S' := S' \cup \{t\}$;

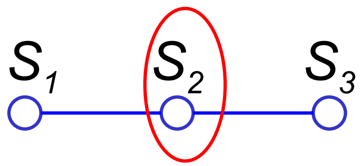
END;

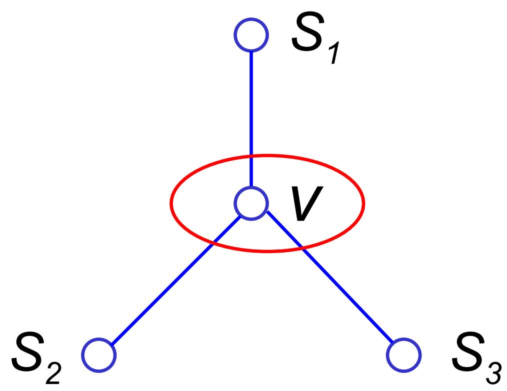
Beispiel

Ausgangsgraph	"Single component growth"-Algorithmus			Optimale Lösung
	1. Iteration	2. Iteration	Heuristische Lösung	
S={a,b,c}	S'={a}	S'={a,b}	S'={a,b,c}	
G: 	G_1: 	G_1: 	G_1: 	

3. Optimaler Algorithmus für das 3-Punkt-STOGP

2 Fälle:



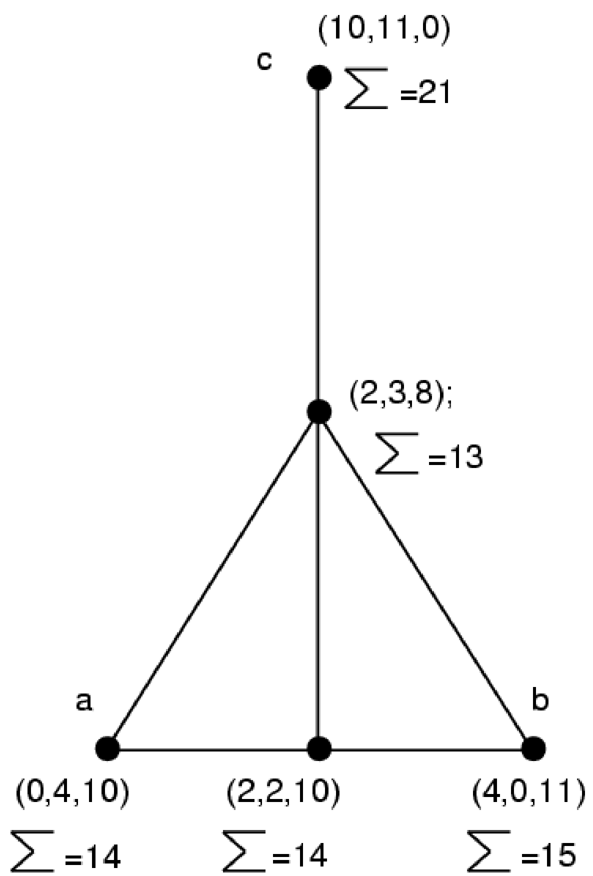


Im Falle einer dreielementigen Menge S besitzt ein in $G = (V, E)$ eingebetteter Baum genau eine Verzweigung, d.h. genau einen Knoten mit mehr als einer Kante.

$\rightarrow$ Suche nach dem Verzweigungspunkt, für den die Kantensumme minimal ist

Optimaler Algorithmus für das 3-Punkt-STOGP (2)

Knoten läßt sich durch dreimaliges Aufrufen des Dijkstra–Algorithmus berechnen:



Knoten mit der kleinsten Summe ist nach Definition des Steiner–Baumes der Verzweigungspunkt.
Suche erfordert maximal $|V|$ Schritte.
Mit dem Dijkstra-Algorithmus anschließend Pfade vom Verzweigungspunkt zu den Knoten aus S bestimmen (Erweiterung von Dijkstra-A.)

Approximative Lösung des STOGP mittels Distanzgraphen

Abweichung des Single *component growth* - Algorithmus vom Optimum? $\rightarrow$ Verfahren mit bekannter Güte

Verfahren von Kou, Markowsky und Berman, 1981:

Die Grundidee des Verfahrens ist die Konstruktion eines vollständigen Graphens mit den Elementen aus S als Knoten. Die Kanten besitzen das Gewicht des Abstandes der Knoten voneinander im Graphen G:

Berechne

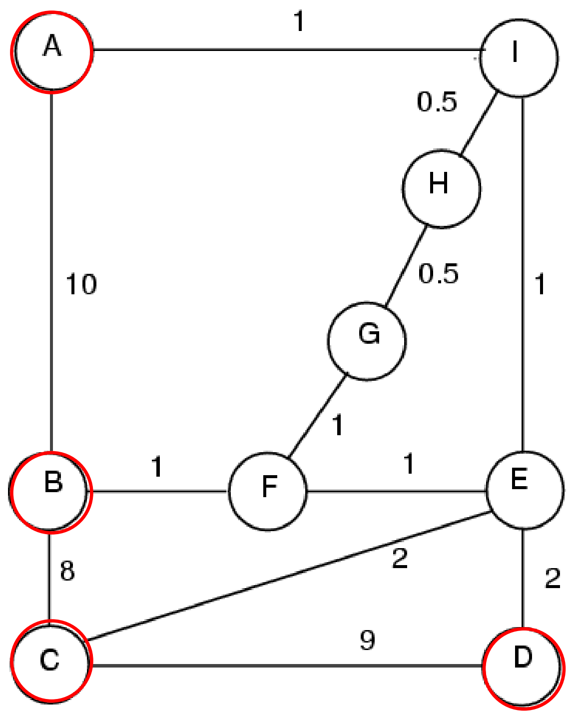
- $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = S$ und
- $\forall x, y \in S : (x, y) \in E_1$ sowie
- $w(x, y) =$ Abstand(x, y).

Dieser Graph heißt **Distanzgraph** für S.

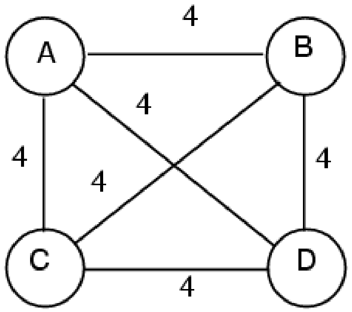
1. Berechnung des Distanzgraphen G_1

Ausgangsgraph G mit $S = \{A, B, C, D\}$

Distanzgraph G_1



a)

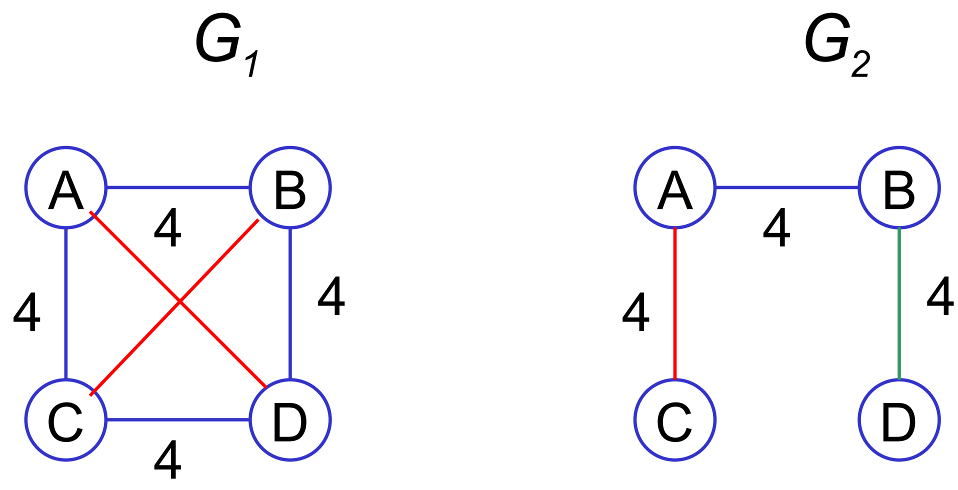


b)

$G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = S$ und $\forall x, y \in S : (x, y) \in E_1$ sowie $w(x, y) =$ Abstand(x, y).

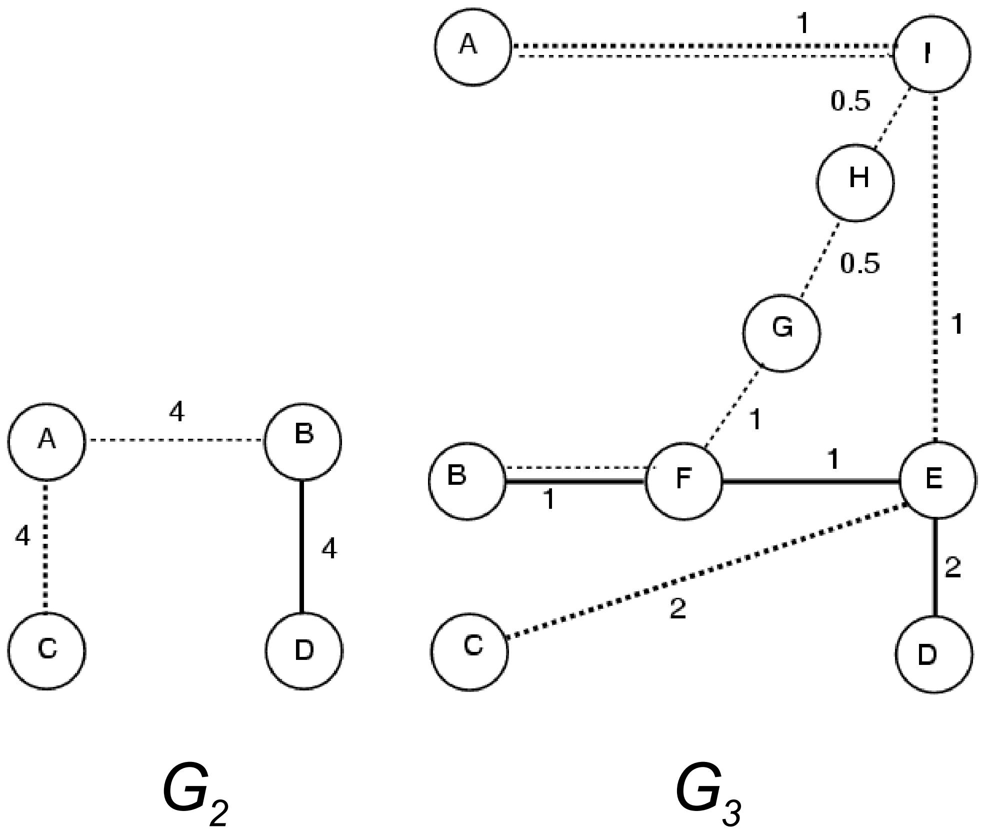
2. Berechnung des minimalen Spannbaums von G_1

Ein minimaler Spannbaum dieses Distanzgraphen bildet die Ausgangsbasis für die Konstruktion des Steiner-Baums. Daraus entsteht Graph G_2:

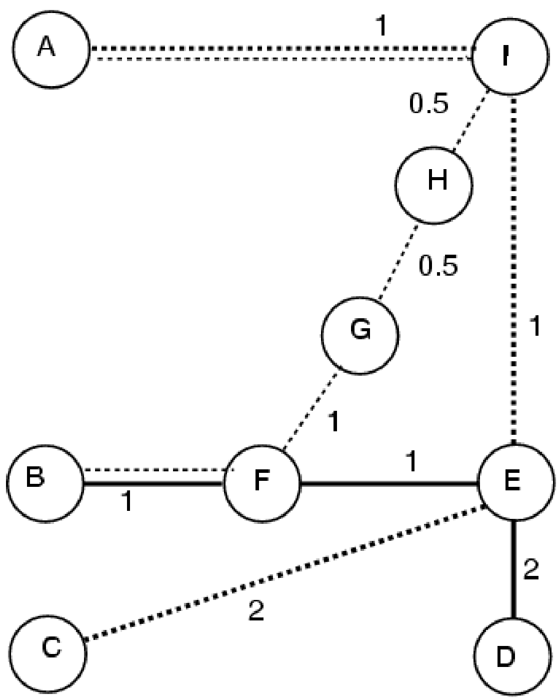


3. Ersetze in G_2 jede Kante durch einen Graphen derselben Länge in G

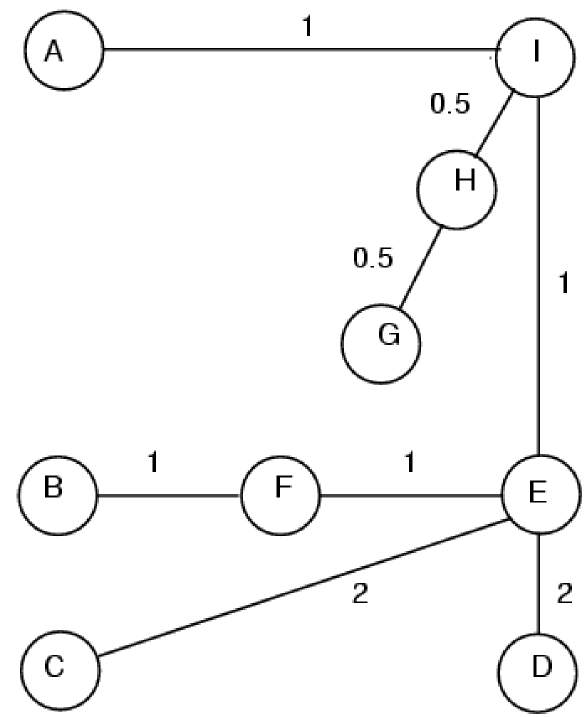
Der erhaltene Graph heiße G_3. Pfade, die für unser Beispiel in den Graphen G_3 übernommen werden. Die zugehörigen Kanten in G_2 sind gestrichelt eingezeichnet.



4. Berechne einen minimalen Spannbaum G_4 von G_3



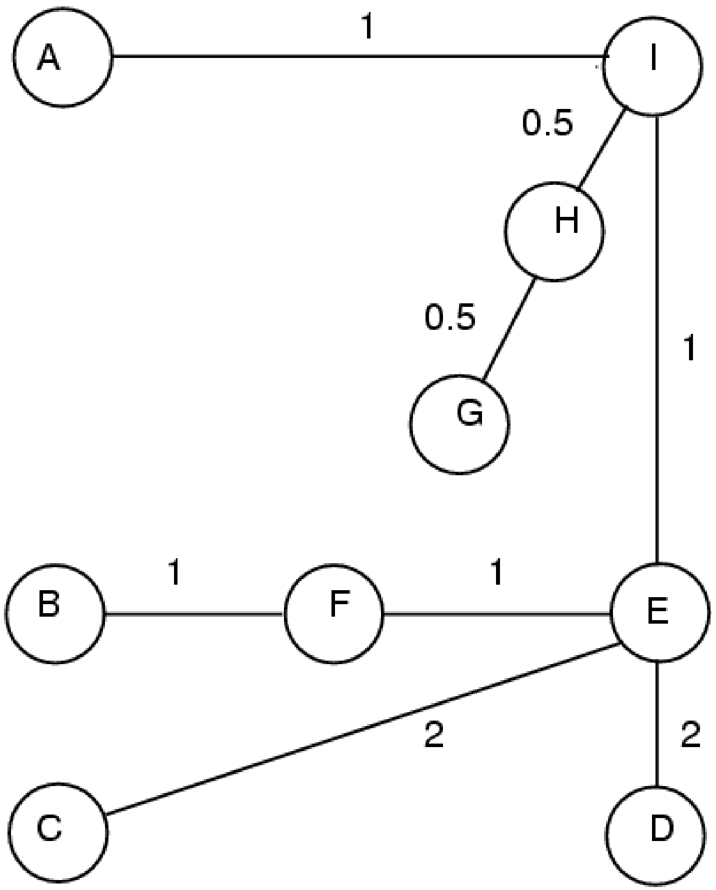
G_3



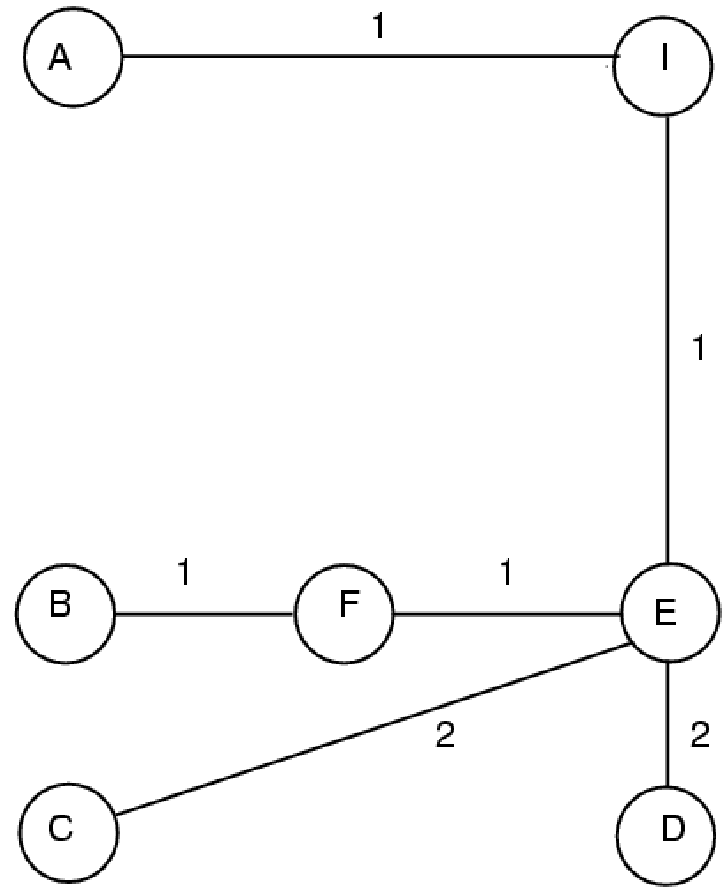
G_4

5. Entferne in G_4 die Blätter, die nicht zu S gehören

Der erhaltene Graph heiße G_5. Das Ergebnis für unser Beispiel:



G_4



G_5

Analyse

1. Berechnung des Distanzgraphen
2. Berechung eines minimalen Spannbaums des Distanzgraphen
3. Ersetze in G_2 jede Kante durch einen Pfad derselben Länge in G
4. Berechne einen minimalen Spannbaum G_4 von G_3
5. Entferne in G_4 die Blätter, die nicht zu S gehören

Algorithmus liefert aufgrund Schritt 4 einen Baum. Aufgrund der Schritte 1 bis 3 sind alle Knoten aus S enthalten. Aufgrund von Schritt 5 sind alle Blätter Knoten aus S. Algorithmus liefert folglich einen Steiner–Baum.

Laufzeit durch Schritt 1 bestimmt. Kürzeste Wege nach Fredman/Tarjan: $|S|$ Aufrufe der Komplexität $O(|E| + |V|log|V|)$, $\rightarrow O(|S|(|E| + |V|log|V|))$.

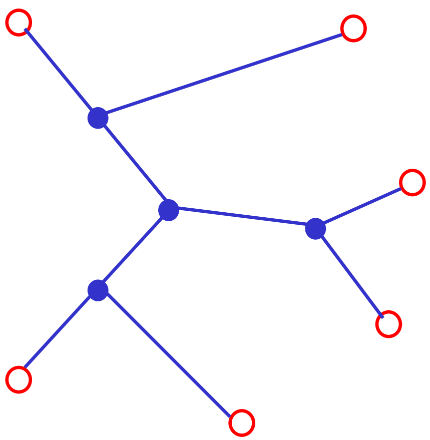
Mehlhorn, 1988: nur ein Teil des Distanzgraphen aus Schritt 1 benötigt, Komplexität auf $O(|E| + |V|log|V|)$ reduziert.

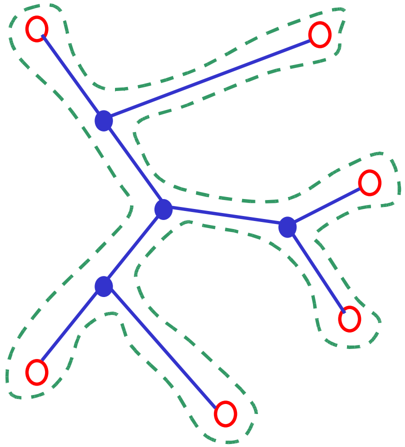
Floren, Inf. 12 (1990): Beim Vorgehen nach Mehlhorn in Schritt 1 sind die Schritte 4 und 5 überflüssig, da in diesem Fall G_4 stets ein Baum ist.

Güte der Lösung

Annahme min. Steinerbaum habe folgendes Aussehen:

Kou - Algorithmus erzeugt dann Lösung, die nicht schlechter ist als die grünen Verbindungen zwischen den Knoten aus *S*.





Gesamtlänge der grünen Verbindungen ist $2\times \ell_{opt}$. Davon ist eine Verbindung zwischen den Knoten aus *S* überflüssig und entsprechend würde die längste Verbindung vom Kou - Algorithmus nicht erzeugt.

$\rightarrow$: $$\ell_{Kou} \leq 2\times \ell_{opt}(1\text{-}1/e)$$

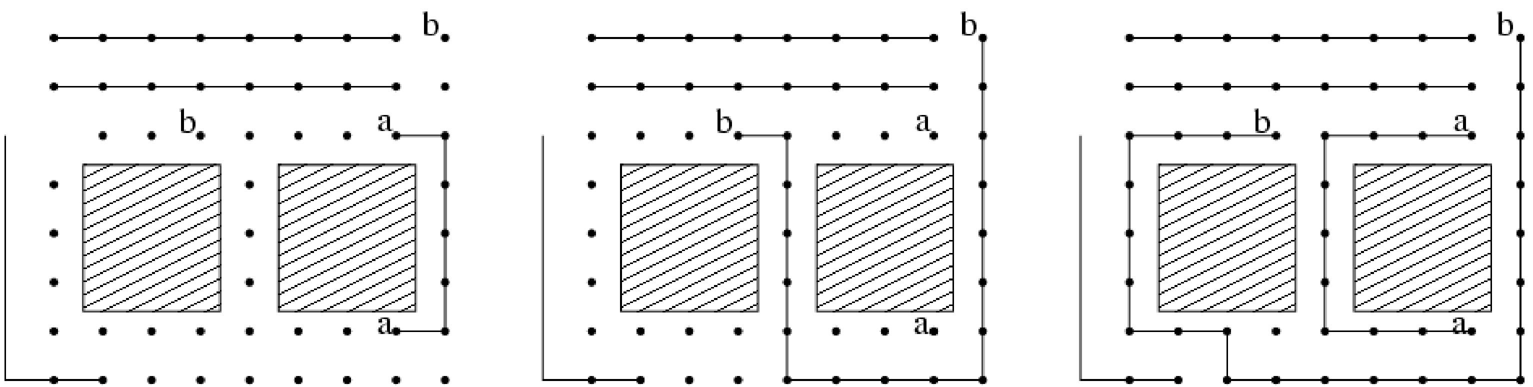
mit *e*=Anzahl der Blätter des optimalen Steiner-Baums

Probleme sequentieller Router

Sequentielles Vorgehen (*net at a time*-Verdrahtung):

Da nicht alle Netze auf einmal verdrahtet werden, wird das Minimum der Gesamtverdrahtungslänge nicht notwendig erreicht.

Extremfall: existierende Lösungen nicht zu finden:



• Zur Verdrahtung nutzbare Rasterpunkte; a,b: Netzanschlüsse

Beginn mit a-Netz | Beginn mit b-Netz | Lösung bei simultaner Verdrahtung

Vermeidung der Probleme sequentieller Router

In diesen Fällen müssen die Netze möglichst in ihrer Gesamtheit betrachtet werden, z.B. mit Mitteln der Kombinatorik.

Verfahren nach Lengauer:

1. für jedes Netz eine Menge alternativer Steiner-Bäume.
2. wechselseitige Abhängigkeiten über ein *integer programming*-Modell darstellen.
3. IP-Modell aus Komplexitätsgründen hierarchisch lösen

Zusammenfassung

- Verdrahtungsproblem aus Komplexitätsgründen unterteilt in globales und lokales Verdrahtungsproblem (engl. *global* bzw. *local routing*)
- Globale Verdrahtung eines Netzes kann auf das *Steiner-tree-on-graph-Problem* (STOGP) zurückgeführt werden
- STOGP - Algorithmen:
  - 2-Punkt: Dijkstra - Algorithmus
  - 3-Punkt: Suche des Verzweigungspunktes
  - |S|=|V|: Spannbaumalgorithmus
  - n-Punkt, n>3, |S|≠|V|:
    - Optimal: NP-hart
    - Heuristiken: *Single component growth*, Kou&Markowsky
- Probleme der *net-at-a-time* Verdrahtung

  ☞Betrachtung von Mengen von Steiner-Bäumen