

## Rechnerstrukturen WS 2011/12

- ▶ Boolesche Funktionen und Schaltnetze
  - ▶ Rechner-Arithmetik
    - ▶ Addition
  - ▶ Bessere Schaltnetze zur Addition
    - ▶ Carry-Look-Ahead-Addierer
  - ▶ Multiplikation
    - ▶ Wallace-Tree
  - ▶ Subtraktion
    - ▶ Addition negativer Zahlen

Hinweis: *Folien teilweise a. d. Basis von Materialien von Thomas Jansen*

29. August 2011

## Rechner-Arithmetik

klar Rechnen zu können ist für Computer zentral.

Was wollen wir hier rechnen?

hier nur Grundrechenarten, aber keine Division, also

- ▶ Addition
- ▶ Subtraktion
- ▶ Multiplikation

Womit wollen wir hier rechnen?

- ▶ mit ganzen Zahlen
- ▶ mit rationalen Zahlen (IEEE 754-1985)

## Addition

Wie haben wir das in der Schule gelernt?

1. Summand			9	3	8	9	9	8	9	
2. Summand				9	7	9	8	9	8	
Übertrag		+	1	1	1	1	1	1	1	
Summe			1	0	3	6	9	8	8	7

Übertragung auf Binärzahlen

1. Summand			1	1	0	0	1	1	1	
2. Summand			1	0	0	1	0	1	1	
Übertrag		+	1			1	1	1	1	
Summe			1	0	1	1	0	0	1	0

## Addition von Binärzahlen

### Beobachtungen zu den Überträgen

- ▶ „1 + 1“ erzeugt einen Übertrag
- ▶ „0 + 0“ eliminiert einen vorhandenen Übertrag
- ▶ „0 + 1“ und „1 + 0“ reichen einen vorhandenen Übertrag weiter
- ▶ Übertrag ist höchstens 1

### Kann man Addition als boolesche Funktion ausdrücken?

$x$	$y$	$c$	$s$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

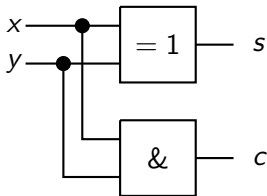
$f_{HA} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^2$  mit

realisiert Addition mit **Summenbit  $s$**  und **Übertrag  $c$  (Carry)**

**Beobachtung**     $c = x \wedge y$      $s = x \oplus y$

## Halbaddierer

$$c = x \wedge y \quad s = x \oplus y$$



Größe 2

Tiefe 1

Drückt  $f_{HA}: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^2$  mit

x	y	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

wirklich Addition aus?

**Beobachtung:** Nur für isolierte Ziffern, **vorheriger Übertrag fehlt!**

## Realisierung von Addition als boolesche Funktion

$f_{VA}: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}^2$  mit

$c_{alt}$	$x$	$y$	$c$	$s$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

realisiert Addition mit **Summenbit  $s$**  und **Übertrag  $c$  (Carry)**

**Beobachtung**  $s = 1 \Leftrightarrow$  Anzahl der Einsen ungerade

$$s = c_{alt} \oplus x \oplus y$$

**Beobachtung**  $c = 1 \Leftrightarrow$  Anzahl Einsen  $\geq 2$

**direkte Realisierung**  $c = x y \vee x c_{alt} \vee y c_{alt}$

## Bessere Realisierung Schaltnetz Volladdierer

bisher

$$s = c_{\text{alt}} \oplus x \oplus y$$
$$c = x y \vee x c_{\text{alt}} \vee y c_{\text{alt}}$$

Ziel für  $c$  1 realisieren  
für  $(c_{\text{alt}}, x, y) \in \{011, 101, 110, 111\}$

Beobachtung  $x \oplus y = 1 \Leftrightarrow$  genau eine 1 in  $x, y$   
also  $c_{\text{alt}} (x \oplus y)$  realisiert 101, 110

fehlt noch 011, 111  
beides durch  $x y$

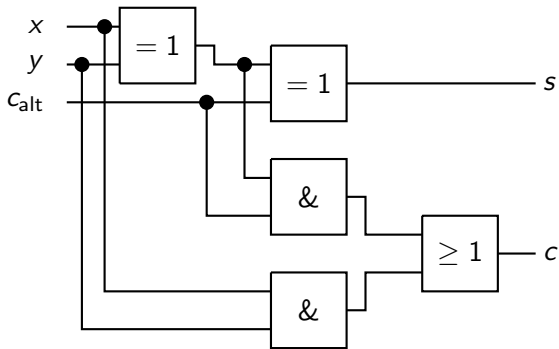
also

$$s = c_{\text{alt}} \oplus x \oplus y$$
$$c = c_{\text{alt}} (x \oplus y) \vee x y$$

## Schaltnetz Volladdierer

$$s = x \oplus y \oplus c_{alt}$$

$$c = c_{alt} (x \oplus y) \vee x y$$

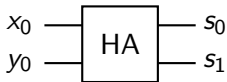


Größe 5, Tiefe 3

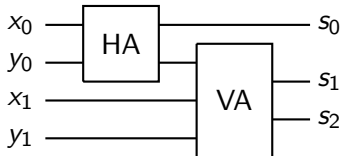


## Vollständiger Addierer

$$\begin{array}{r}
 + \quad \quad x_0 \\
 \quad \quad y_0 \\
 \hline
 s_1 \quad s_0
 \end{array}$$

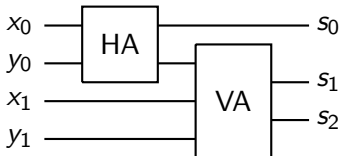


$$\begin{array}{r}
 + \quad \quad x_1 \quad x_0 \\
 \quad \quad y_1 \quad y_0 \\
 \hline
 s_2 \quad s_1 \quad s_0
 \end{array}$$

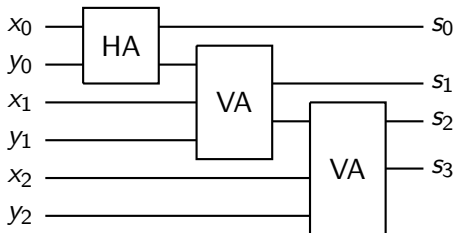


## Vollständiger Addierer

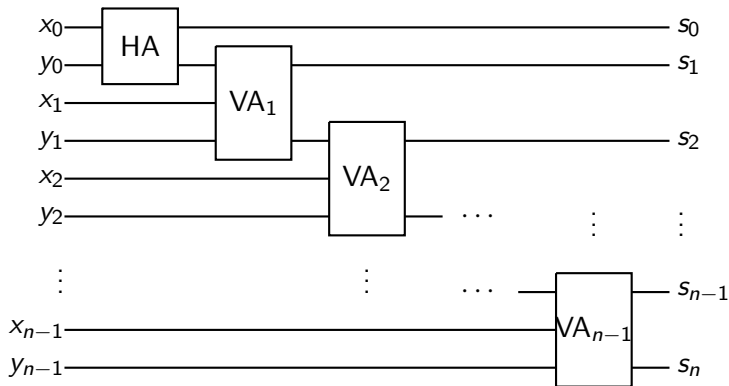
$$\begin{array}{r}
 \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\
 \phantom{+} \phantom{+} x_1 \phantom{+} x_0 \\
 + \phantom{+} y_1 \phantom{+} y_0 \\
 \hline
 s_2 \phantom{+} s_1 \phantom{+} s_0
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\
 \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} x_2 \phantom{+} x_1 \phantom{+} x_0 \\
 + \phantom{+} y_2 \phantom{+} y_1 \phantom{+} y_0 \\
 \hline
 s_3 \phantom{+} s_2 \phantom{+} s_1 \phantom{+} s_0
 \end{array}$$



## Realisierung Addition



Größe  $2 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 3$

Tiefe  $1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$

## Ergebnis: Ripple-Carry Addierer

### Realisierung „Addition von natürlichen Zahlen“

- ▶ sehr gut strukturiert
- ▶ Größe  $5n - 3$  ← sehr klein
- ▶ Tiefe  $3n - 2$  ← **viel** zu tief

### Warum ist unser Schaltnetz so tief?

offensichtlich      Überträge brauchen sehr lange

Verbesserungsidee      Überträge früher berechnen

Erinnerung      Struktureinsicht

$$(x_i, y_i) = (1, 1)$$

$$(x_i, y_i) = (0, 0)$$

$$(x_i, y_i) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$$

generiert Übertrag

eliminiert Übertrag

reicht Übertrag weiter

## Ausnutzen von Einsichten

### Struktureinsicht

$$(x_i, y_i) = (1, 1)$$

generiert Übertrag

$$(x_i, y_i) = (0, 0)$$

eliminiert Übertrag

$$(x_i, y_i) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$$

reicht Übertrag weiter

Beobachtung sehr gut durch Halbaddierer realisierbar

$x_i$	$y_i$	$u_i$	$v_i$	Übertrag
0	0	0	0	eliminieren
0	1	0	1	weiterreichen
1	0	0	1	weiterreichen
1	1	1	0	generieren

also  $u_i = 1$  generiert Übertrag

$v_i = 1$  reicht Übertrag weiter

zentrale Beobachtung alle HA in Tiefe 1 parallel realisierbar

## Realisierung als Schaltnetz

Notation  $f_{HA}(x_i, y_i) = (u_i, v_i)$

$u_i = 1$  generiert Übertrag  $c_{i+1}$

$v_i = 1$  reicht Übertrag  $c_{i+1}$  weiter

$$\begin{aligned}
 c_i &= u_{i-1} \vee u_{i-2} v_{i-1} \vee u_{i-3} v_{i-2} v_{i-1} \vee \cdots \vee u_0 v_1 v_2 \cdots v_{i-1} \\
 &= \bigvee_{j=0}^{i-1} \left( u_j \wedge \bigwedge_{k=j+1}^{i-1} v_k \right)
 \end{aligned}$$

Gesamttiefe: 4

alle Halbaddierer  $(u_i, v_i)$  Tiefe 1

alle Und-Gatter  $u_j \wedge \bigwedge_{k=j+1}^{i-1} v_k$  Tiefe 1

großes Oder-Gatter Tiefe 1

$n \times \oplus$ -Gatter f. korr. Summenbits Tiefe 1

## Realisierung als Schaltnetz

Mit dem Ansatz

$u_j = 1$  generiert Übertrag  $c_{i+1}$

$v_j = 1$  reicht Übertrag  $c_{i+1}$  weiter

$$\begin{aligned}
 c_i &= u_{i-1} \vee u_{i-2} v_{i-1} \vee u_{i-3} v_{i-2} v_{i-1} \vee \cdots \vee u_0 v_1 v_2 \cdots v_{i-1} \\
 &= \bigvee_{j=0}^{i-1} \left( u_j \wedge \bigwedge_{k=j+1}^{i-1} v_k \right)
 \end{aligned}$$

beliebig lange Zahlen in Tiefe 4 addieren...

Ist das fair gezählt? **Nein!**

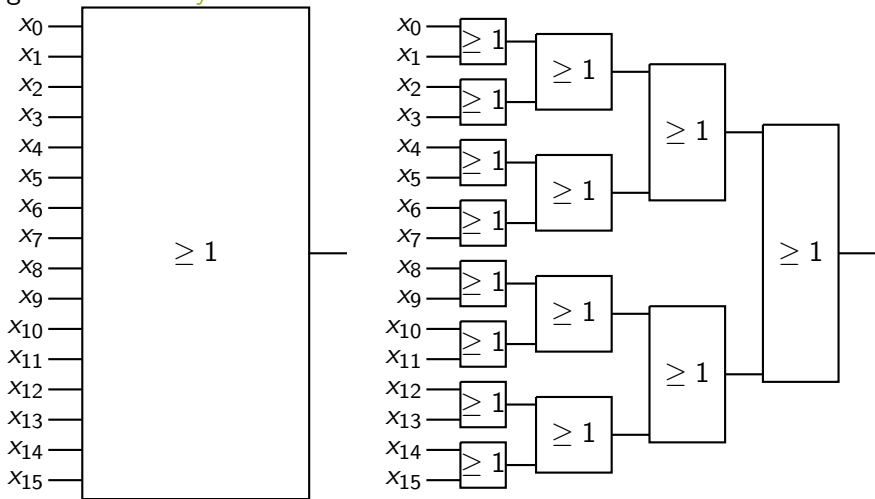
Begriff Anzahl Eingänge eines Gatters heißt Fan-In

Problem Wir vergleichen Schaltnetz mit max. Fan-In 2 mit Schaltnetz mit max. Fan-In  $n$ .

Ziel Vergleichbarkeit herstellen

## Vermeidung von großem Fan-In

großen Fan-In **systematisch** verkleinern





## Vermeidung von großem Fan-In

### am Beispiel

aus Fan-In 16 bei Tiefe 1 (Größe 1)  
wird Fan-In 2 bei Tiefe 4 bei Größe 15

### Wie ist das allgemein?

#### Größe

bei jeder Stufe nur noch halb so viele Gatter

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots + 1 \approx n$$

#### Tiefe

so oft halbieren, bis man bei 1 Gatter ist

$$\approx \log_2 n$$

## Carry Look-Ahead Addierer (CLA)

Realisierung „Addition von natürlichen Zahlen“

- ▶ gut strukturiert
- ▶ Größe  $\approx n^2$  ← ziemlich groß
- ▶ Tiefe  $\approx 2 \log_2 n$  ← ziemlich flach

Haben wir jetzt im Vergleich zum *Ripple-Carry-Addierer* gewonnen?

$n$	Ripple-Carry Größe	Ripple-Carry Tiefe	Carry Look-Ahead Größe	Carry Look-Ahead Tiefe
8	37	22	64	6
16	77	46	256	8
32	157	94	1 024	10
64	317	190	4 096	12

## Noch einmal nachdenken...

Wir wissen doch schon

Jede boolesche Funktion in Tiefe 3 realisierbar!  
(DNF, KNF, RNF)

Wieso nicht auf die Addition?

- ▶ klar geht in Tiefe 3
- ▶ aber Größe inakzeptabel (exponentiell)

Fazit vorhandenes Vorwissen ausnutzen,  
Normalformen nur bei kleinen oder unstrukturierten Funktionen

## Multiplikation

direkt mit Binärzahlen...

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \cdot 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
 \hline
 \phantom{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0} \phantom{\cdot} \phantom{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0} 0 \\
 \phantom{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0} \phantom{\cdot} \phantom{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
 \phantom{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0} \phantom{\cdot} \phantom{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0} \phantom{0} 0 \\
 \phantom{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0} \phantom{\cdot} \phantom{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0} \phantom{0\ 0} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
 \phantom{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0} \phantom{\cdot} \phantom{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0} \phantom{0\ 0\ 0} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
 \phantom{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0} \phantom{\cdot} \phantom{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0} \phantom{0\ 0\ 0\ 0} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0
 \end{array}$$

also Multiplizieren heißt

- ▶ Nullen passend schreiben
- ▶ Zahlen passend verschoben kopieren
- ▶ viele Zahlen addieren

## Multiplikation als Schaltnetz

Multiplikation ist

- ▶ Nullen passend schreiben
- ▶ Zahlen passend verschoben kopieren
- ▶ viele Zahlen addieren

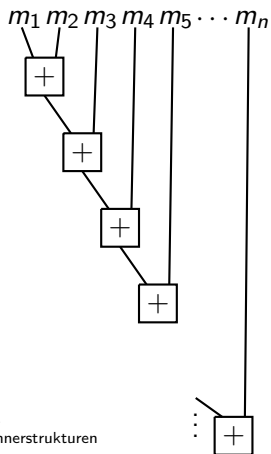
klar Nullen schreiben **einfach** und **kostenlos**,  
Zahlen verschieben und kopieren **einfach** und **kostenlos**,  
**viele** Zahlen addieren **nicht ganz so einfach**

## Addition vieler Zahlen

klar Wir haben Addierer für die Addition zweier Zahlen.

Wie addieren wir damit  $n$  Zahlen?

erster Ansatz einfach nacheinander



Tiefe  $(n - 1) \cdot \text{Tiefe}(+)$  Schrecklich!

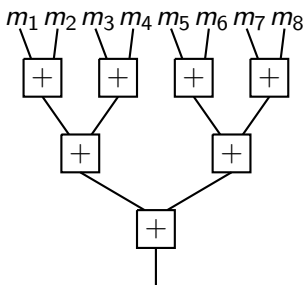
klar sehr naiv

merken in Schaltnetzen niemals alles nacheinander

Was geht gleichzeitig?

## Addition von $n$ Zahlen

besserer Ansatz paarweise addieren



$$\text{Anzahl Addierer} = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 \approx n$$

$$\text{Gesamtgröße} \approx n \cdot \text{Größe}(+)$$

Tiefe auf  $i$ -ter Ebene  
 $2^{\log_2(n)-i}$  Addierer

also  $\approx \log_2(n)$  Ebenen

$$\text{Gesamttiefe} \approx \log_2(n) \cdot 2 \log_2(n) = 2 \log_2(n)^2$$

Geht es vielleicht noch schneller?

## Addition von $n$ Zahlen noch schneller

(triviale) Beobachtung Addition ersetzt **zwei** Zahlen  
durch **eine** Zahl gleicher Summe

zentral für uns

- ▶ gleiche Summe  $\rightsquigarrow$  Korrektheit
- ▶ weniger Zahlen  $\rightsquigarrow$  „Fortschritt“

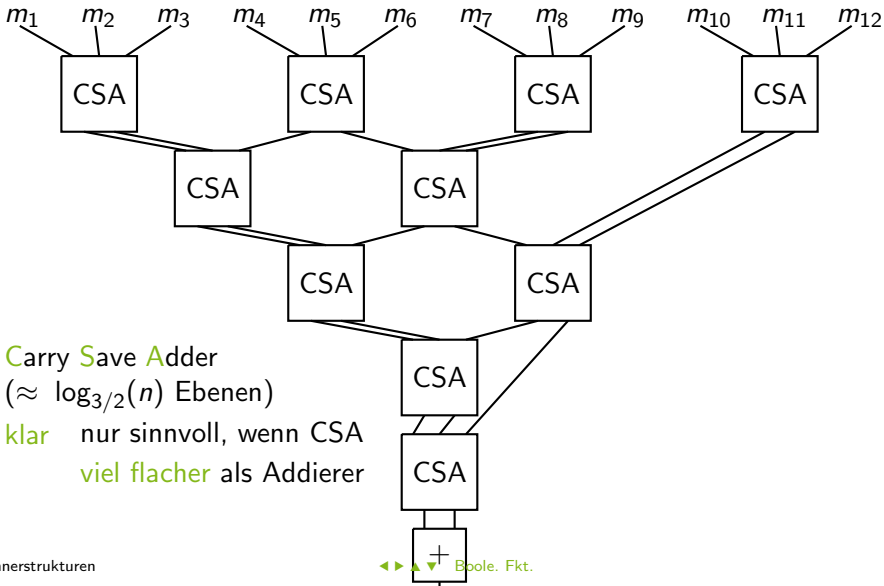
(verrückte?) Idee Vielleicht ist es einfacher,  
**drei** Zahlen zu ersetzen durch  
**zwei** Zahlen gleicher Summe?

klar immer noch „gleiche Summe  $\rightsquigarrow$  Korrektheit

aber „3  $\rightsquigarrow$  2“ statt „2  $\rightsquigarrow$  1“  
weniger Fortschritt Ist das schlimm?



## Wallace-Tree



## Carry Save Adder

gesucht Zahlen  $a, b$  mit  $a + b = x + y + z$

Beobachtung für  $x, y, z \in \{0, 1\}$  schon bekannt  
 $x + y + z = 2 \cdot u + v$  (Volladdierer)

Beobachtung Es genügt, dass parallel  
für alle Stellen zu machen.

	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$
+	$y_3$	$y_2$	$y_1$	$y_0$
+	$z_3$	$z_2$	$z_1$	$z_0$
	$(2u_3 + v_3)$	$(2u_2 + v_2)$	$(2u_1 + v_1)$	$(2u_0 + v_0)$
	$u_3$	$u_2$	$u_1$	$u_0$
+	$v_3$	$v_2$	$v_1$	$v_0$

## Korrektheit der CSA-Realisierung

aus Volladdierer  $x_i + y_i + z_i = 2u_i + v_i$

$$\begin{aligned}
 x + y + z &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot 2^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{n-1} z_i \cdot 2^i \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} ((x_i + y_i + z_i) \cdot 2^i) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} ((2u_i + v_i) \cdot 2^i) \\
 &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot 2^{i+1} \right) + \left( \sum_{i=0}^{n-1} v_i \cdot 2^i \right)
 \end{aligned}$$

## Multiplikation mit Wallace-Tree

klar für drei  $n$ -Bit-Zahlen reichen  $n$  Volladdierer

also Größe  $5n$   
Tiefe 3

Gesamtgröße  $\sim n^2$

Gesamttiefe  $\approx \underbrace{3 \cdot \log_{3/2}(n)}_{\text{Wallce-Tree}} + \underbrace{2 \log_2(n)}_{\text{Addierer}} \approx 7,13 \log_2(n)$

Fazit Multiplikation wesentlich „teurer“ als Addition,  
aber nicht wesentlich langsamer!

## Subtraktion

**Beobachtung** Niemand muss subtrahieren!

**Begründung** Statt „ $x - y$ “ einfach „ $x + (-y)$ “ rechnen!

**also Idee** Ersetze Subtraktion durch

1. Vorzeichenwechsel
2. Addition einer eventuell negativen Zahl

**noch zu untersuchen**

1. Wie schwierig ist der Vorzeichenwechsel?
2. Wie funktioniert die Addition von negativen Zahlen?

## Vorzeichenwechsel

Repräsentation	Vorgehen	Kommentar
Vorzeichen-Betrag	Vorzeichen-Bit invertieren	sehr einfach
Einerkomplement	alle Bits invertieren	einfach
Zweierkomplement	alle Bits invertieren, 1 addieren	machbar
Exzess	Subtraktion von $2y$	schwierig

**Beobachtung** für Exzessdarstellung funktioniert  
 Addierer selbst bei positiven Zahlen **nicht**  
 $„x + y“ \rightsquigarrow (b + x) + (b + y) = (b + x + y) + b$

**also** Exzessdarstellung fürs Rechnen **weitgehend ungeeignet**,  
 nur **günstig** für Vergleiche

## Addition negativer Zahlen

klar unsere Schaltnetze für die Addition  
(Schulmethode, Carry-Look-Ahead, Ladner-Fischer)  
sind für **Betragszahlen** entworfen

Müssen wir für negative Zahlen komplett neu entwerfen?

klar Das hängt von der Repräsentation ab.

Exzessdarstellung **Betrachten wir gar nicht,**  
weil wir damit nicht einmal addieren können.

**Vorzeichen-Betrag** positive und negative fast gleich dargestellt,  
darum **neuer Schaltnetzentwurf erforderlich**

## Addition negativer Zahlen im Einerkomplement

auf dieser und nächster Folie

- ▶ Notation  $\bar{y}$  ist Komplement von  $y$
- ▶ Wir **wechseln** frei zwischen Zahlen und ihren Repräsentationen.
- ▶ feste **Darstellungslänge**  $l$

Beobachtung  $y + \bar{y} = 2^l - 1$   
 $\Leftrightarrow \bar{y} = 2^l - 1 - y$

Rechne

$$x - y = x + (-y) = x + \bar{y} = x + 2^l - 1 - y = 2^l + (x - y) - 1$$

Wichtig Darstellungslänge  $\Rightarrow 2^l$  „passt nicht“ (**Überlauf**)

also Überlauf ignorieren  $\Rightarrow$  noch 1 addieren  $\rightsquigarrow$  **korrekt**



## Addition negativer Zahlen im Zweierkomplement

Beobachtung  $y + \bar{y} = 2^l - 1$   
 $\Leftrightarrow \bar{y} = 2^l - 1 - y$

Rechne

$$x - y = x + (-y) = x + \bar{y} + 1 = x + 2^l - 1 - y + 1 = 2^l + (x - y)$$

wichtig Darstellungslänge  $\Rightarrow 2^l$  „passt nicht“ (Überlauf)

also Überlauf ignorieren  $\Rightarrow$  korrekt

also Addierer rechnet richtig auch für negative Zahlen

$\rightsquigarrow$  Zweierkomplement verbreitetste Darstellung ganzer Zahlen

## Überträge bei Addition im Zweierkomplement

Wann ist das Ergebnis korrekt und wann nicht darstellbar?

### 1. Addition zweier positiver Zahlen

klar Ergebnis positiv

Beobachtung kein Überlauf möglich

also Ergebnis korrekt, wenn positiv

### 2. Addition einer positiven und einer negativen Zahl

klar Ergebnis kleiner als größte darstellbare Zahl

klar Ergebnis größer als kleinste darstellbare Zahl

also Ergebnis immer korrekt

### 3. Addition zweier negativer Zahlen

gesehen Überlauf entsteht ( $\rightsquigarrow$  ignorieren)

klar Ergebnis negativ

also Ergebnis korrekt, wenn negativ