Rechnerstrukturen WS 2011/12

- Boolesche Funktionen und Schaltnetze
- Optimierung von Schaltnetzen
  - Einleitung
- KV-Diagramme
  - Beschreibung und Beispiel
  - Minimalpolynome

Hinweis: *Folien teilweise a. d. Basis von Materialien von Thomas Jansen*

29. August 2011

Optimierung von Schaltnetzen

Was bedeutet Optimierung?

klar bestmögliche Lösung finden

also

1. Lösungen finden
2. beweisen, dass es keine bessere gibt

hier meist nur
Verbesserung, nicht Optimierung

Strukturierter Schaltnetz-Entwurf

Schaltnetz-Entwurf bisher

- ad hoc
- Normalformen

Wunsch Systematisierung, Strukturierung

Hoffnungen

- einfacher zu guten Entwürfen
- Schaltnetze verständlicher
- Schaltnetze besser verifizierbar

Systematisierung Schaltnetz-Entwurf

banale(?) Grundidee Wiederverwendung guter Schaltnetze als Komponenten

klar schon gemacht
(z. B. bei allen Addierern HA verwendet)

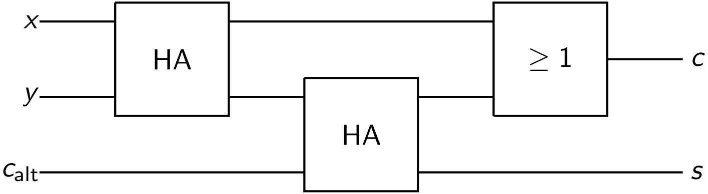
zum Einstieg noch elementareres Beispiel

Kann man VA *sinnvoll* aus HA bauen?

Noch einmal zum Volladdierer

			VA „$c_{\text{alt}} + x + y$“		HA „$x + y$“		HA „$c_{\text{alt}} + A_s$“		
c_{alt}	x	y	c	s	A_c	A_s	B_c	B_s	$A_c \vee B_c$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Strukturierter Volladdierer



Größe 5 Tiefe 3

Erinnerung Halbaddierer
Größe 2, Tiefe 1

Erinnerung „alter" Volladdierer
Größe 5, Tiefe 3

also immerhin nichts verloren
im Vergleich zum sorgfältigen „ad hoc-Entwurf"

Multiplexer

Erinnerung vereinfachte Wertetabelle

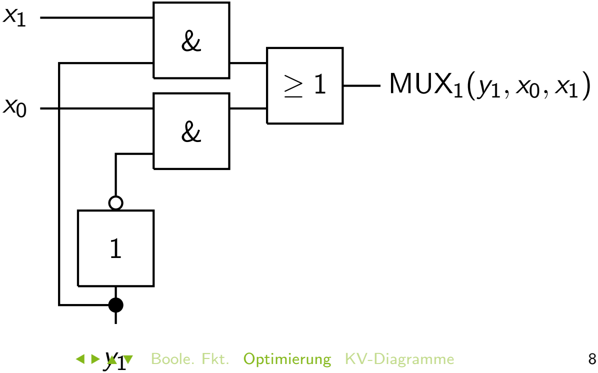
y_1	$\text{MUX}_1(y_1, x_0, x_1)$
0	x_0
1	x_1

normale (ausführliche) Wertetabelle

y_1	x_1	x_0	$\text{MUX}_1(y_1, x_0, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$\mathbf{MUX}_1\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$

y_1	x_1	x_0	$\mathrm{MUX}_1(y_1, x_0, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Strukturiert zum Schaltnetz für MUX_2

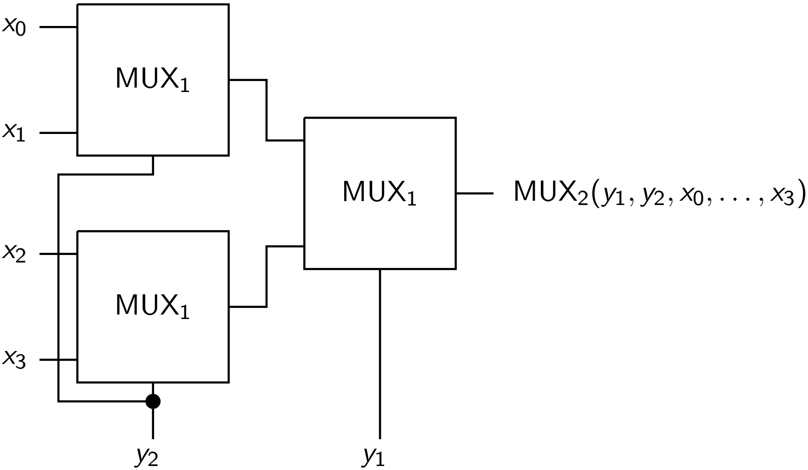
y_1	y_2	$\text{MUX}_2(y_1, y_2, x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0	x_0
0	1	x_1
1	0	x_2
1	1	x_3

Beobachtung

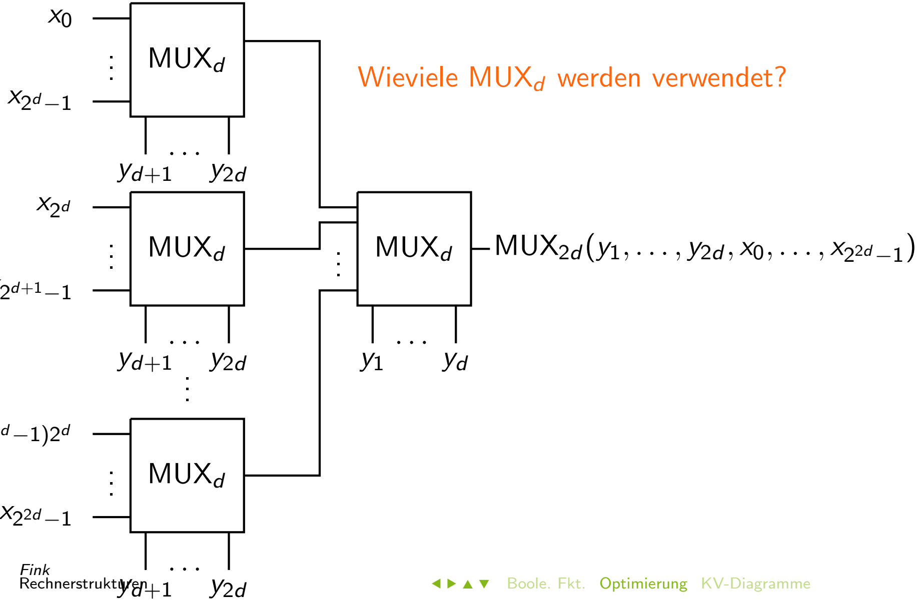
- $y_2 = 0 \Rightarrow \text{MUX}_2(y_1, y_2, x_0, x_1, x_2, x_3) \in \{x_0, x_2\}$
- $y_2 = 1 \Rightarrow \text{MUX}_2(y_1, y_2, x_0, x_1, x_2, x_3) \in \{x_1, x_3\}$

also ein MUX_1 wählt mittels y_2 aus $\{x_0, x_1\}$
ein MUX_1 wählt mittels y_2 aus $\{x_2, x_3\}$
ein MUX_1 wählt mittels y_1 aus den Ergebnissen

Strukturierter MUX_2



Strukturierter MUX_{2d}



Wieviele MUX_d werden verwendet?

KV-Diagramme

Maurice Karnaugh (1953)
Edward W. Veitch (1952)

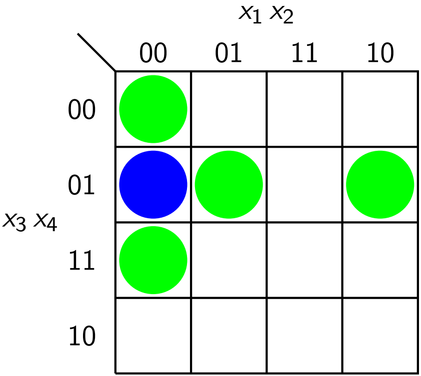
KV-Diagramme systematischer, anschaulicher und viel übersichtlicherer Weg, Funktionen $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ und $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ zu vereinfachen

aber schon für $f\colon \{0,1\}^5 \to \{0,1\}$ unübersichtlich

$\Rightarrow$ darum vor allem im HaPra wichtig.

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



Hinweis: Nicht alle möglichen Nachbarschaften gezeigt!

Beispiel KV-Diagramm für $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,0)$
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,\dots,x_4)$
0	0	0	0	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	0	1	1	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	1	1	1	0

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	1	1	0	1

Nullen weglassen

für mehr Übersichtlichkeit

Was fällt bei der Variablenbelegung auf? Warum ist das so?

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				1
10	1	1		1

$x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow x_1\,\overline{x_2}$

$x_1 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

$x_2 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow \overline{x_2}\,\overline{x_4}$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$= x_1\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.
Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.
Decke alle Einsen durch sparsame Rechteckauswahl ab.
Bilde f als Disjunktion der korrespondierenden Monome.

Einordnung KV-Diagramme

Was leisten KV-Diagramme?

Beobachtung — Wir lösen mit KV-Diagrammen ein Problem, das wir noch gar nicht definiert haben.

klar — Wir holen das jetzt nach.

vorab — Begriffsfestlegungen

- Variable
  Beispiele $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- Literale — Variable und Negationen
  Beispiele $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots$
- Monom — Konjunktion einiger Literale
  Beispiele $x_1 \overline{x_3} x_4,\ x_2$
- Polynom — Disjunktion einiger Monome
  Beispiel $\overline{x_1}\, x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_4}\, x_5$

Weitere Begriffsdefinitionen

Wir haben schon Variable, Literal, Monom, Polynom.

- Implikant von f Monom m mit folgender Eigenschaft:
  $\forall x \in \{0,1\}^n \colon m(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$
  Beispiel Monom eines Polynoms für f
- Verkürzung eines Monoms m Monom m', für das m Implikant ist
  Beispiel $x_1\,\overline{x_3}$ ist Verkürzung von $x_1\,\overline{x_3}$
- echte Verkürzung eines Monoms m Monom m', das Verkürzung von m ist und echt weniger Literale enthält
  Beispiel $\overline{x_3}$ ist echte Verkürzung von $x_1\,\overline{x_3}$
- Primimplikant von f Implikant von f, für den es keine echte Verkürzung gibt, die auch Implikant von f ist
  Beispiel $\overline{x_2}\,x_3$ ist Primimplikant von $x_1 \vee \overline{x_2}\,x_3$

Verbindung zu Schaltnetzen

Erinnerung Wir zählen keine Negationen mehr.

Monom mit i Literalen Und-Gatter mit Fan-In i oder
$i-1$ Und-Gatter mit Fan-In 2
angemessen Kosten i

Polynom mit j Monomen zusätzlich Oder-Gatter mit Fan-In j oder
$j-1$ Oder-Gatter mit Fan-In 2
angemessen zusätzlich Kosten j

also direkte Verbindung zwischen
Polynom-Kosten und Schaltnetz-Kosten

noch ein letzter Begriff

Minimalpolynom zu f Polynom für f mit minimalen Kosten
unter allen Polynomen für f

Minimalpolynome

also Minimalpolynome liefern „günstigste“ Schaltnetze. . .

Vorsicht Stimmt nicht so ganz!
nur richtig, wenn man sich auf
direkte Polynomrealisierung einschränkt

trotzdem Wir suchen Minimalpolynome.

Wie finden wir systematisch Minimalpolynome?

Minimalpolynome und Primimplikanten

Theorem Minimalpolynome enthalten nur Primimplikanten.

Beweis durch Widerspruch

Annahme $f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_i$ Minimalpolynom,
m_1 kein Primimplikant zu f

gemäß Definition $\exists m'$: m_1 ist Implikant von m',
m' ist echte Verkürzung von m_1 und
m' ist Implikant von f

klar $m_1 = 1 \Rightarrow m' = 1$, da m_1 Implikant von m'
Beobachtung $m' = 1 \Rightarrow f = 1$, da m' Implikant von f ist
also $m' \vee m_2 \vee \cdots \vee m_i$ ist günstigeres Polynom für f
Widerspruch zur Voraussetzung, dass $m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_i$
Minimalpolynom für f $\square$

Minimalpolynomberechnung

Idee für Minimalpolynomberechnung

1. Berechne alle Primimplikanten von f.
2. Berechne günstigste „Überdeckung“ von f mit diesen Monomen.

Beobachtung Dieser Ansatz ist sicher schlecht, wenn
das Minimalpolynom zu f klein ist,
f aber viele Primimplikanten hat.

Wir verfolgen diesen Ansatz dennoch.

Minimalpolynomberechnung

Behauptung Wir haben mit KV-Diagrammen Minimalpolynome berechnet.

klar Wir haben günstigste Überdeckung von f gesucht.

offen Entsprechen maximale Rechtecke mit Zweierpotenzseitenlängen genau Primimplikanten?

klar Für $f \colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ gibt es Monome der Längen 0, 1, 2, 3 und 4.

Wir schauen uns die Situation für jede mögliche Monomlänge an.

Primimplikanten der Länge 0

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Monom 1

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	1
11			1	1
10	1	1	1	1

Monom x_1

Monom $\overline{x_4}$

Primimplikanten der Länge 2

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10	1	1		

Monom $\overline{x_1}\, x_3$

Primimplikanten der Länge 3

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11	1			1
10				

Monom $\overline{x_2}\, x_3\, x_4$

Primimplikanten der Länge 4

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10		1		

Monom $\overline{x_1}\ x_2\ x_3\ \overline{x_4}$

Beobachtung: Primimplikanten entsprechen genau KV-Rechtecken

Minimalpolynombestimmung mit KV-Diagramm

Aufgabe Bestimme für $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ ein Minimalpolynom.

Vorgehen

1. Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm
2. Finden aller maximaler Zweierpotenz-Rechtecke
3. Finden eines Primimplikanten für jedes Rechteck
4. Finden einer Überdeckung aller Einsen durch eine minimale Monomauswahl

jetzt noch ein Beispiel
$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$

Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm

$$f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\} \text{ mit } (\overset{0}{1}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{1}, \overset{4}{0}, \overset{5}{1}, \overset{6}{0}, \overset{7}{1}, \overset{8}{0}, \overset{9}{1}, \overset{10}{0}, \overset{11}{1}, \overset{12}{0}, \overset{13}{0}, \overset{14}{1}, \overset{15}{1})$$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$$0 = (00\,00)_2$$
$$1 = (00\,01)_2$$
$$2 = (00\,10)_2$$
$$3 = (00\,11)_2$$
$$4 = (01\,00)_2$$
$$5 = (01\,01)_2$$
$$6 = (01\,10)_2$$
$$7 = (01\,11)_2$$
$$8 = (10\,00)_2$$
$$9 = (10\,01)_2$$
$$10 = (10\,10)_2$$
$$11 = (10\,11)_2$$
$$12 = (11\,00)_2$$
$$13 = (11\,01)_2$$
$$14 = (11\,10)_2$$
$$15 = (11\,11)_2$$

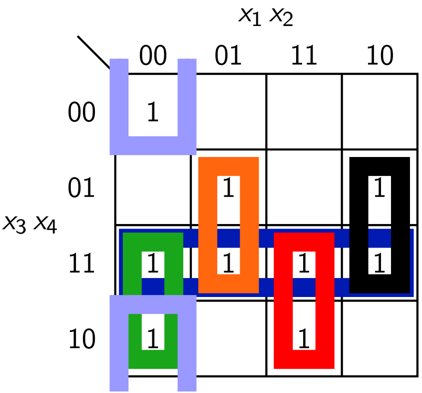
Finden aller maximaler Zweierpotenz-Rechtecke

$f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

Finden eines Primimplikanten für jedes Rechteck

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$



$x_3\, x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$

$x_1\,x_2\,x_3$

$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$x_3\,x_4$	beste Wahl
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	
$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$	**erforderlich**
$x_1\,x_2\,x_3$	**erforderlich**
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$	**erforderlich**
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	**erforderlich**

also $x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$
Minimalpolynom

Fazit KV-Diagramme

Mit KV-Diagrammen effizient beide Schritte zur Minimalpolynomberechnung durchführbar

1. Bestimmung aller Primimplikanten
2. Bestimmung einer minimalen Überdeckung

für Funktionen $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ für $n \in \{3,4\}$

klar Das reicht nicht aus.

Wie bestimmen wir Minimalpolynome für $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ für größeres n?

klar Wir suchen einen Algorithmus.