

Rechnerstrukturen WS 2011/12

- ▶ Boolesche Funktionen und Schaltnetze
- ▶ Hazards
 - ▶ Einleitung
 - ▶ Schaltungshazards
- ▶ Programmierbare Bausteine
 - ▶ Einleitung
 - ▶ Einsatz von PLAs

Hinweis: *Folien teilweise a. d. Basis von Materialien von Thomas Jansen*

29. August 2011

Hazards

ärgerlich, aber unvermeidlich Abweichungen zwischen
Modell und Realität

Das gilt auch für technisch realisierte Schaltnetze.

Was passiert, wenn die Eingabe wechselt?

klar Die Ausgabe kann wechseln.

Wunsch

- ▶ wenn f die Ausgabe wechselt, wechselt das Schaltnetz genau einmal seine Ausgabe
- ▶ wenn f die Ausgabe nicht wechselt, wechselt das Schaltnetz seine Ausgabe nicht

Realität Schaltnetz kann Ausgabe „zwischen durch“ wechseln.

Das heißt **Hazard**.

Hazards: Begriffe

Hazards sind

- ▶ **statisch** Ausgabewert soll gleich bleiben, ändert sich aber.
- ▶ **dynamisch** Ausgabewert soll sich ändern, ändert sich aber mehrfach.
- ▶ **Funktionshazard** „schon in der Funktionsdefinition enthalten“
- ▶ **Schaltungshazard** Hazard, der kein Funktionshazard ist

also vier verschiedene Fälle

Statischer Funktionshazard

Definition

$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ hat **statischen Funktionshazard**, wenn es $a = a_1 a_2 \cdots a_n \in \{0, 1\}^n$ und $b = b_1 b_2 \cdots b_n \in \{0, 1\}^n$ mit $a \neq b$ und $f(a) = f(b)$ gibt, sowie $c = c_1 c_2 \cdots c_n \in \{0, 1\}^n$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $f(c) \neq f(a)$.

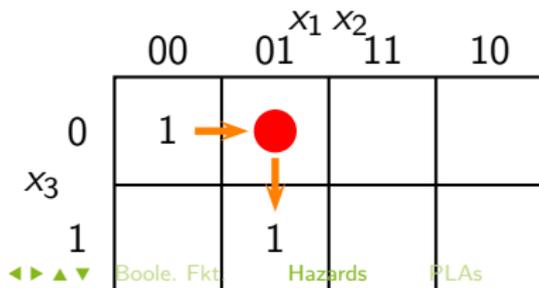
Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$a = 000, f(a) = 1$

$c = 010, f(c) = 0$

$b = 011, f(b) = 1$



Dynamischer Funktionshazard

Definition

$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ hat **dynamischen Funktionshazard**, wenn es $a, b \in \{0, 1\}^n$ mit $a \neq b$ und $f(a) \neq f(b)$ gibt, sowie $c = c_1 c_2 \cdots c_n$ und $c' = c'_1 c'_2 \cdots c'_n$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $c'_i \in \{c_i, b_i\}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) und $f(c) \neq f(a)$ sowie $f(c) \neq f(c')$.

Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$a = 000, f(a) = 1$$

$$c = 001, f(c) = 0$$

$$c' = 011, f(c') = 1$$

$$b = 111, f(b) = 0$$

	x_1		x_2	
	00	01	11	10
0	1		1	
1	●	●	0	

Zusammenfassung: Statische/Dynamische Hazards

Wir haben korrektes Schaltnetz S für f .

Wir betrachten Eingabewechsel von a auf b .

1. Funktionswert bleibt gleich: $f(a) = f(b)$

Am Ausgang von S liegt kurzzeitig ein anderer Wert an.
statischer Hazard

2. Funktionswert ändert sich: $f(a) \neq f(b)$

Am Ausgang von S ändert sich der Wert mehrfach.
dynamischer Hazard

Weitergehende Klassifikation

- ▶ Manche Hazard heißen Funktionshazards.
- ▶ Die übrigen Hazards heißen Schaltungshazards.

Wie kommt es zum Funktionshazard?

Betrachte Eingabewechsel von a nach b mit
entweder $f(a) = f(b)$ statisch
oder $f(a) \neq f(b)$ dynamisch

Es gibt statisch: 1 andere Eingabe c
dynamisch: 2 andere Eingaben c, c'

zwischen a und b ,
so dass der Funktionswert beim Weg von a nach b

statisch über c wechselt
dynamisch über c und c' mehrfach wechselt

zentral andere Eingaben echt „dazwischen“

Was bedeutet „dazwischen“?

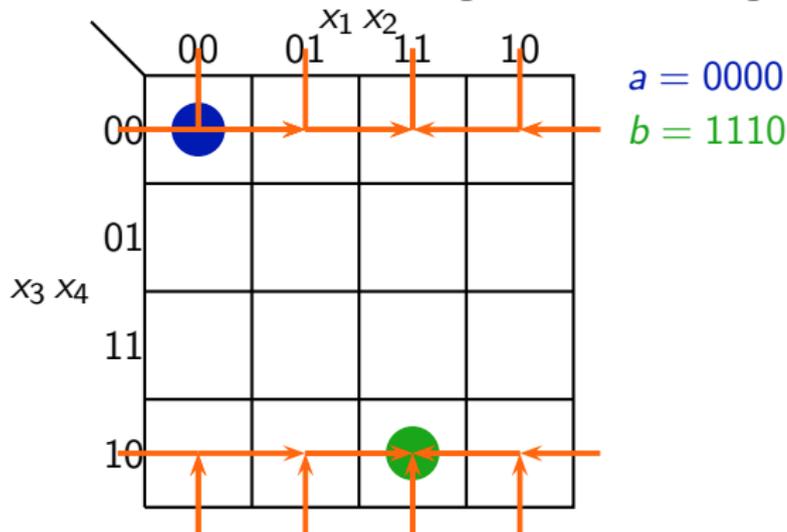
in Bezug auf Eingabewechsel

- ▶ Wertänderung einiger Eingabebits (alle Bits mit $a_i \neq b_i$)
- ▶ nicht völlig gleichzeitig
- ▶ also „dazwischen“ = kann als Zwischenschritt bei Wertänderung der Eingabebits vorkommen

beim Blick auf KV-Diagramm

- ▶ auf einem kürzesten Weg von a nach b

Kürzeste Wege im KV-Diagramm



Beobachtung 3 Bits verschieden
 kürzeste Wege haben Länge 3
 (i.a.: n unterschiedliche Bits \Rightarrow kürzeste Weglänge = n)

Funktionshazards

klar Funktionshazards sind in Realisierungen von Schaltnetzen nicht zu vermeiden

zur Kenntnis nehmen Es gibt Hazards.

für uns interessanter Schaltungshazards

Definition Schaltungshazard Funktion hat bezüglich a, b keinen Hazard, Schaltnetz aber schon

Fragen

1. Wie kann das passieren?
2. Kann man das vermeiden?

Definition Schaltungshazard

Definition

Schaltnetz S für f hat einen **statischen Schaltungshazard**, wenn es $a, b \in \{0, 1\}^n$ gibt, so dass f bezüglich a, b keinen statischen Funktionshazard hat, aber beim Eingabewechsel von a nach b am Ausgang von S **nicht notwendig** stabil $f(a)$ anliegt.

Definition

Schaltnetz S für f hat einen **dynamischen Schaltungshazard**, wenn es $a, b \in \{0, 1\}^n$ gibt, so dass f bezüglich a, b keinen dynamischen Funktionshazard hat, aber beim Eingabewechsel von a nach b am Ausgang von S mehr als ein Funktionswertwechsel **auftreten kann**.

Beachte: Auftreten nicht garantiert!

Beispiel statischer Schaltungshazard

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

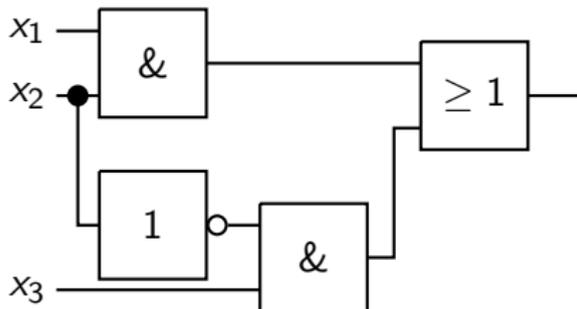
$$a = 111, f(a) = 1$$

$$b = 101, f(b) = 1$$

klar kein Funktionshazard

Gar kein c zwischen a und b !

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Vermeidung von Schaltungshazards

Wir konzentrieren uns auf

- ▶ statische Schaltungshazards,
- ▶ Schaltnetze, die direkt Polynome realisieren.

Sind in solchen Schaltnetzen Schaltungshazards ganz vermeidbar?

gute Nachricht ja

schlechte Nachricht nicht kostenlos

Wie vermeidet man statische Schaltungshazards?

Satz

Sei S ein Schaltnetz, das direkt ein Polynom p einer booleschen Funktion f realisiert. S hat genau dann keinen statischen Schaltungshazard, wenn S für jeden Primimplikanten von f ein Und-Gatter enthält.

Beweis durch Widerspruch:

statischer Schaltungshazard \Leftrightarrow ein Primimplikant fehlt

Beweistrategie

1. **Beweis:** statischer Schaltungshazard \Rightarrow ein Primimplikant fehlt
2. **Beweis:** Primimplikant fehlt \Rightarrow statischer Schaltungshazard

Hazard \Rightarrow Primimplikant fehlt

Voraussetzungen

- ▶ Es gibt statischen Hazard bezüglich a und b .
- ▶ Es gibt keinen Funktionshazard bezüglich a und b .
- ▶ a und b unterscheiden sich in genau einem Bit

1. Fall $f(a) = f(b) = 0$

klar alle Und-Gatter permanent 0

also Wert am Ausgang permanent 0

also kein Hazard ✓

2. Fall $f(a) = f(b) = 1$

Sei m_a Minterm zu a , m_b Minterm zu b

Beobachtung \exists Monom m , Variable x : $\{m_a, m_b\} = \{m x, m \bar{x}\}$

klar m ist Implikant von f

also S enthält Und-Gatter für Verkürzung m' von m

Beobachtung Dieses Und-Gatter ist permanent 1 (da unabh. von x).

Fink also Wert am Ausgang permanent 1
 Rechnerstrukturen

◀▶▲▼ Boole. Fkt.

also Hazards

kein Hazard ✓
PLAs

Primimplikant fehlt \Rightarrow Hazard

Voraussetzungen

- ▶ S realisiert direkt Polynom p für f
- ▶ \exists Primimplikant m von f : kein Und-Gatter für m in S

Definiere Eingaben a und b .

- ▶ $x_i \in m \rightsquigarrow a_i = b_i = 1$
- ▶ $\bar{x}_i \in m \rightsquigarrow a_i = b_i = 0$
- ▶ sonst $\rightsquigarrow a_i = 0, b_i = 1$

Beobachtung $m(a) = m(b) = 1$

also $f(a) = f(b) = 1$

Beobachtung kein Hazard \Leftrightarrow ein Und-Gatter permanent 1

klar So ein Und-Gatter realisiert Verkürzung von m .

also So ein Und-Gatter gibt es in S nicht.

also Hazard



Zusammenfassung: Hazards

Fazit Hazards

- ▶ Hazards sind ärgerlich.
Wann liegt der richtige Funktionswert vor?
- ▶ Funktions hazards sind so nicht vermeidbar.
- ▶ Statische Schaltung hazards können mit zusätzlichem Aufwand vermieden werden.
- ▶ Eine grundsätzliche Lösung ist wünschenswert.

mögliche grundsätzliche Lösung: Taktung der Schaltung ⇒ später

Realisierung von Schaltnetzen

Gedanken zur Anwendung

1. Problem
2. boolesche Funktion
3. Schaltnetz-Entwurf
4. Schaltnetz-Realisierung

Realisierungen

- ▶ hoch-integrierte Schaltung
teuer Lohnt sich nur bei großen Stückzahlen.
- ▶ direkte Umsetzung mit Gattern
umständlich

Realisierung mit Gattern

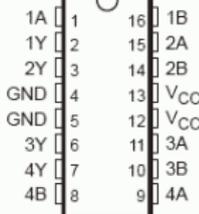
Datenblatt von Texas Instruments (www.ti.com)

74AC11008 QUADRUPLE 2-INPUT POSITIVE-AND GATE

SCAS014C – AUGUST 1987 – REVISED APRIL 1996

- Flow-Through Architecture Optimizes PCB Layout
- Center-Pin V_{CC} and GND Configurations Minimize High-Speed Switching Noise
- EPIC™ (Enhanced-Performance Implanted CMOS) 1- μ m Process
- 500-mA Typical Latch-Up Immunity at 125°C
- Package Options Include Plastic Small-Outline (D) and Thin Shrink Small-Outline (PW) Packages, and Standard Plastic 300-mil DIPs (N)

D, N, OR PW PACKAGE
(TOP VIEW)



description

This device contains four independent 2-input AND gates. It performs the Boolean function $Y = A \cdot B$ or $Y = \overline{A} + \overline{B}$ in positive logic.

The 74AC11008 is characterized for operation from -40°C to 85°C .

FUNCTION TABLE
(each gate)

INPUTS		OUTPUT
A	B	Y
H	H	H
L	H	L
H	L	L
L	L	L

Boole. Fks.

Hazards

PLAs

Alternative Realisierung

- ▶ massenhaft produzierte
- ▶ darum **preisgünstige**
- ▶ nach der Fertigstellung in ihrer Funktion noch beeinflussbare
- ▶ **funktional vollständige**
- ▶ also **universelle** Standardbausteine

Programmable Logic Array (PLA)

Varianten PAL, PROM, FPGA, ...
(zum Teil eingeschränkte Funktionalität)

Programmable Logic Array (PLA)

Datenblatt von Lattice (www.latticesemi.com)



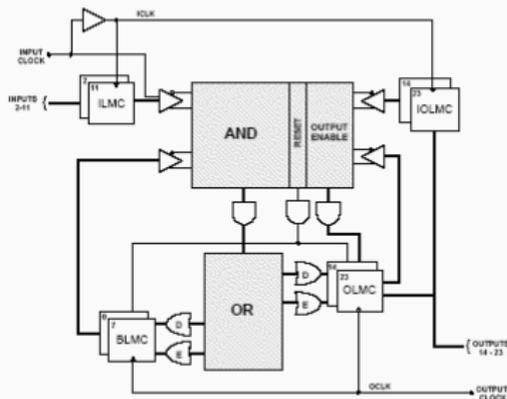
GAL6001

High Performance E²CMOS FPLA
Generic Array Logic™

Features

- HIGH PERFORMANCE E²CMOS® TECHNOLOGY
 - 30ns Maximum Propagation Delay
 - 27MHz Maximum Frequency
 - 12ns Maximum Clock to Output Delay
 - TTL Compatible 16mA Outputs
 - UltraMOS® Advanced CMOS Technology
- LOW POWER CMOS
 - 90mA Typical I_{cc}
- E² CELL TECHNOLOGY
 - Reconfigurable Logic
 - Reprogrammable Cells
 - 100% Tested/100% Yields
 - High Speed Electrical Erasure (<100ms)
 - 20 Year Data Retention
- UNPRECEDENTED FUNCTIONAL DENSITY
 - 78 x 64 x 36 FPLA Architecture
 - 10 Output Logic Macrocells
 - 8 Buried Logic Macrocells
 - 20 Input and I/O Logic Macrocells
- HIGH-LEVEL DESIGN FLEXIBILITY
 - Asynchronous or Synchronous Clocking
 - Separate State Register and Input Clock Pins
 - Functional Superset of Existing 24-pin PAL®

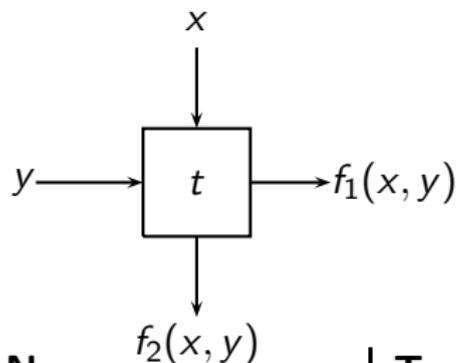
Functional Block Diagram



Macrocell Names

ILMC	INPUT LOGIC MACROCELL
IOLMC	I/O LOGIC MACROCELL
BLMC	BURIED LOGIC MACROCELL

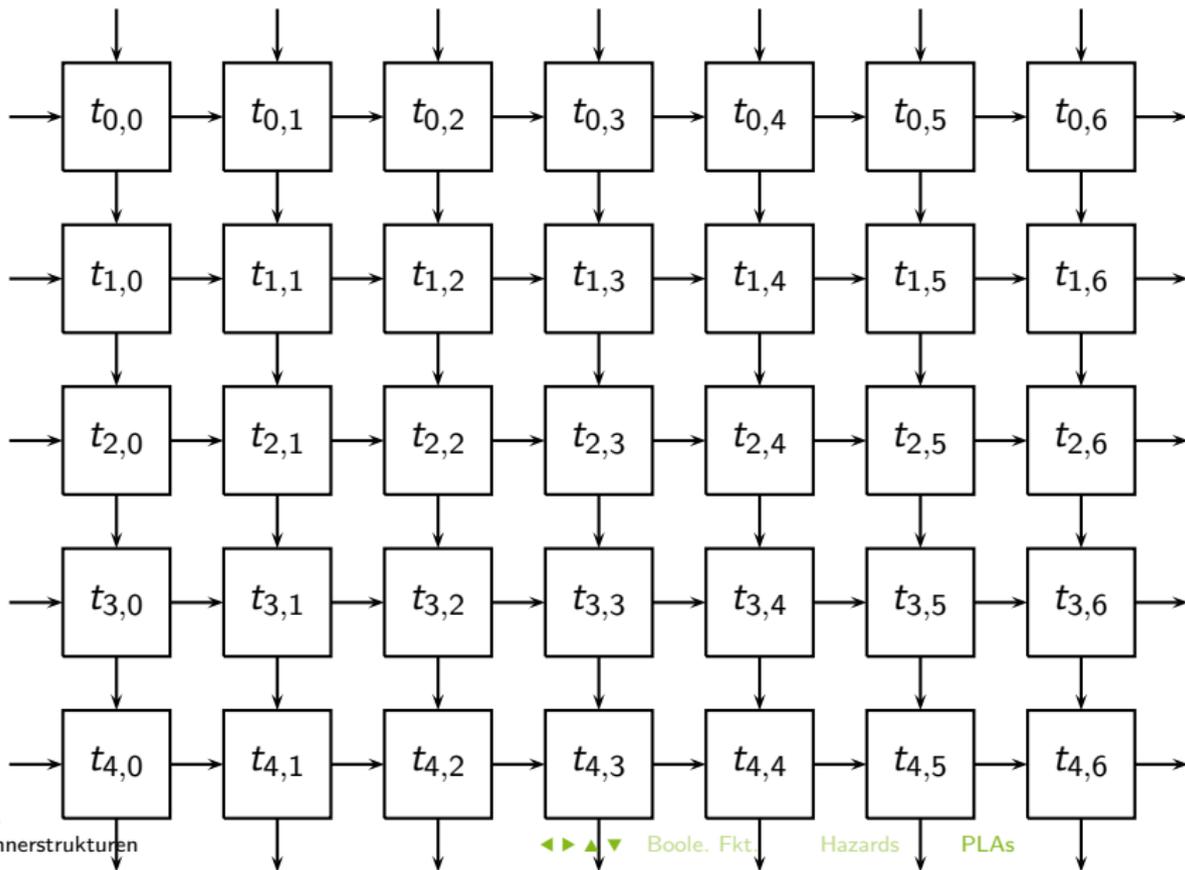
PLA Grundbausteine



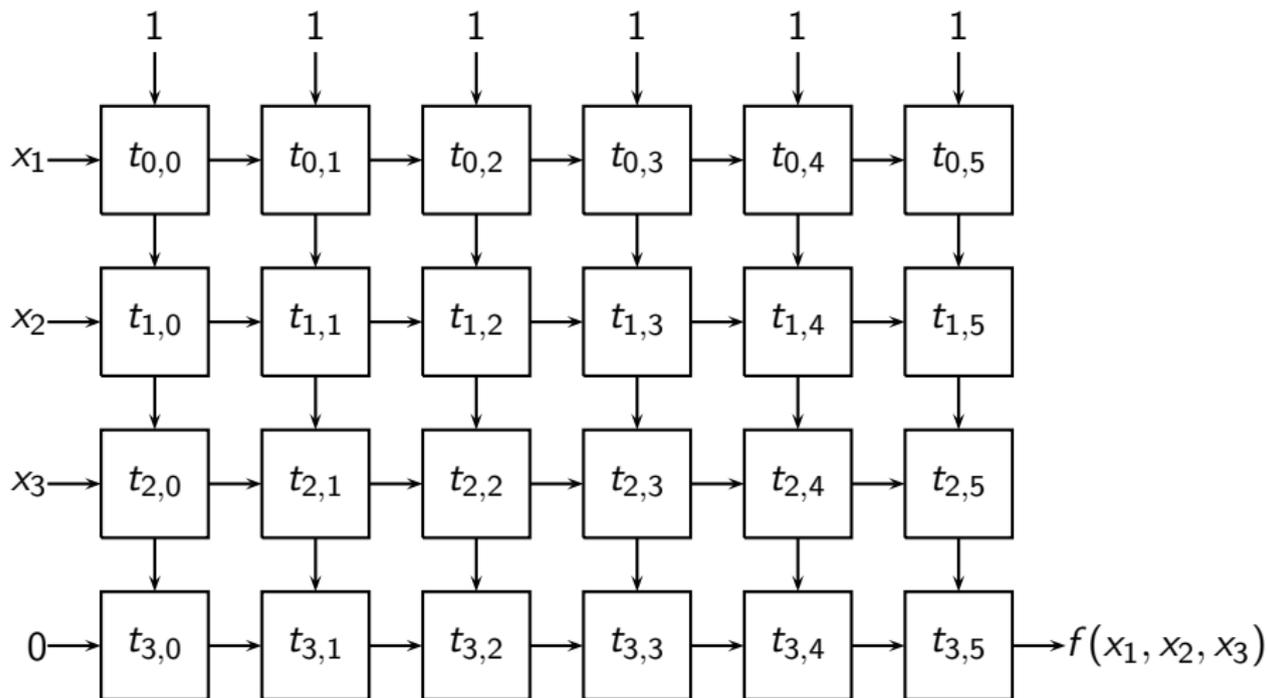
Name	Typ	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y)$
Identer	0	y	x
Addierer	1	$x \vee y$	x
Multiplizierer	2	y	$x y$
Negat-Multiplizierer	3	y	$x \bar{y}$

klar funktional vollständig

PLA



PLA für $f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$



PLA: Bausteinwahl

klar jede Funktion als Polynom darstellbar

Erinnerung Polynom = Disjunktion einiger Monome

erster Schritt

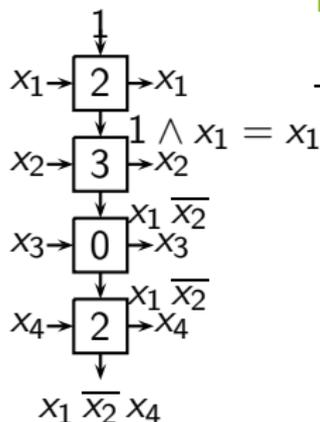
Wie realisieren wir Monome?

exemplarisch am Beispiel $x_1 \overline{x_2} x_4$

PLA: Monomrealisierung

Beispiel Monom $x_1 \overline{x_2} x_4$

Erinnerung



Name	Typ	$f_r(o, l)$	$f_u(o, l)$
Identer	0	$/$	o
Addierer	1	$o \vee l$	o
Multiplizierer	2	$/$	$o l$
Negat-Multiplizierer	3	$/$	$o \bar{l}$

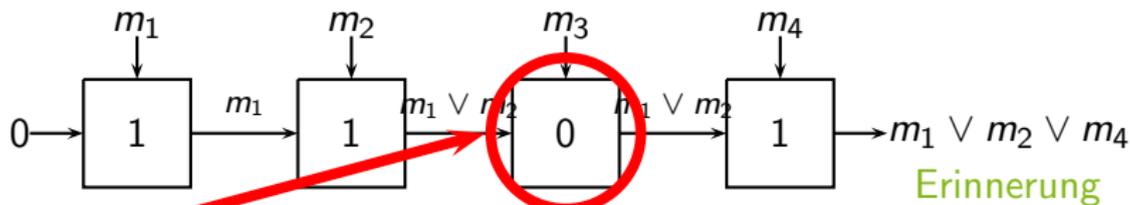
also jedes Monom leicht realisierbar

- ▶ falls Variable fehlt Typ 0
- ▶ falls x_i vorkommt Typ 2
- ▶ falls $\overline{x_i}$ vorkommt Typ 3

PLA: Polynomrealisierung

gesehen für $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
 k verschiedene Monome m_1, m_2, \dots, m_k
in n Zeilen und k Spalten realisierbar

Wie können wir f realisieren, z. B. $f = m_1 \vee m_2 \vee m_4$?



Ist das sinnvoll?

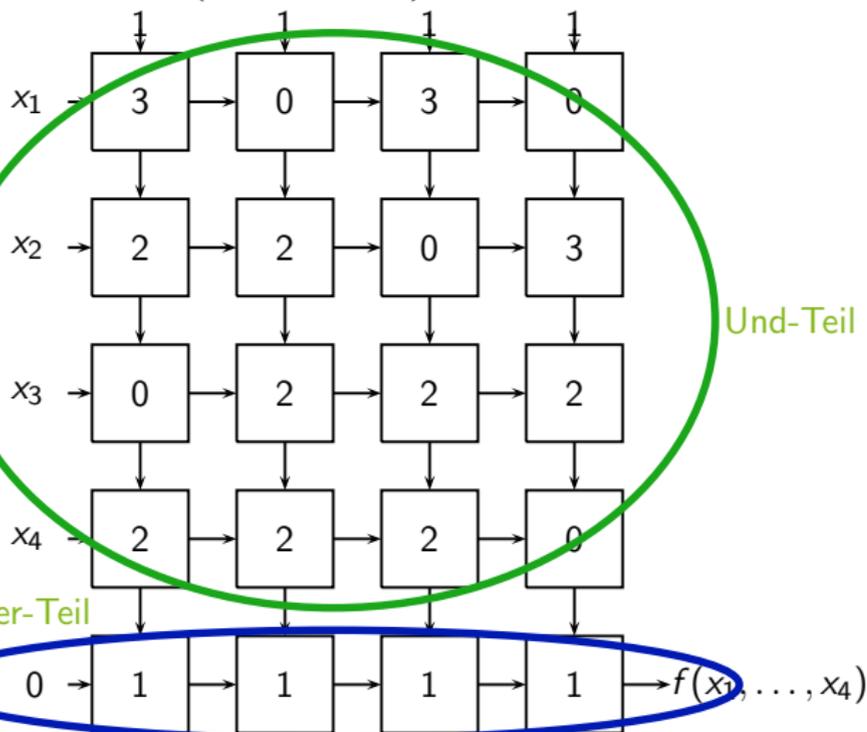
klar für
 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

nicht
aber für
 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$
schon

Name	Typ	$f_r(o, l)$	$f_u(o, l)$
Identer	0	l	o
Addierer	1	$o \vee l$	o
Multiplizierer	2	l	$o l$
Negat-Multiplizierer	3	l	$o \bar{l}$

PLA: Ein konkretes Beispiel

Beispiel $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee \overline{x_2} x_3$



Fazit zur PLA-Nutzung

also Wir können jede Funktion $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$,
für deren Polynom insgesamt k Implikanten ausreichen,
mit einem PLA mit $n + m$ Zeilen und k Spalten realisieren.

klar Wir wünschen uns k klein.

dafür Minimalpolynome

Wie findet man Minimalpolynome für Funktionen
 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$?

Minimalpolynome für $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$

Notation statt $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$
 (f_1, f_2, \dots, f_m) mit $f_i: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
 für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

Definition Ein **Minimalpolynom** für $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$
 ist (p_1, p_2, \dots, p_m) mit minimalen Kosten,
 dabei ist p_i Polynom für f_i . Bei den Kosten
 zählen mehrfach vorkommende Monome nur einmal.

Also suchen wir Minimalpolynome p_i für f_i ? **Nein!**

Beispiel $p_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 \vee \overline{x_2} x_3$ ist Minimalpolynom
 $p_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee x_2 x_3$ ist Minimalpolynom

$p'_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_2} x_3$ stellt auch p_1 dar
 $p'_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 x_2 x_3$ stellt auch p_2 dar

Gesamtkosten $(p_1, p_2) = (n + m) \times k = (3 + 2) \times 4$

Gesamtkosten $(p'_1, p'_2) = (n + m) \times k = (3 + 2) \times 3$ Book: ftk 21.4.2015 PLAs

Monome für Minimalpolynome für $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^k$

Welche Monome übernehmen die Rolle der Primimplikanten?

Definition Ein Monom m ist ein **multipler Primimplikant** von $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ mit $f_i: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, wenn m Primimplikant von $\bigwedge_{i \in I} f_i$ ist für eine nicht-leere Menge $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$.

Theorem Minimalpolynome für $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^k$ enthalten nur multiple Primimplikanten von f .

Beweis und **Algorithmus** zur Berechnung → Skript

Minimalpolynomberechnung für $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$

Algorithmus

1. Für alle f_i berechne alle Primimplikanten.
2. Berechne alle multiplen Primimplikanten.
(ergeben sich potentiell als paarweise Verknüpfung "normaler"
Primimplikanten)
3. Berechne eine möglichst günstige Überdeckung.

also günstigste Darstellung für PLA-Realisierungen
mit uns bekannten Mitteln berechenbar
allerdings **sehr aufwendig**

PLA als ROM

Aufgabe Speichere 2^n „Wörter“ der Länge m .

$$w_0 = w_{0,0} w_{0,1} w_{0,2} \cdots w_{0,m-1} \in \{0, 1\}^m$$

$$w_1 = w_{1,0} w_{1,1} w_{1,2} \cdots w_{1,m-1} \in \{0, 1\}^m$$

$$w_2 = w_{2,0} w_{2,1} w_{2,2} \cdots w_{2,m-1} \in \{0, 1\}^m$$

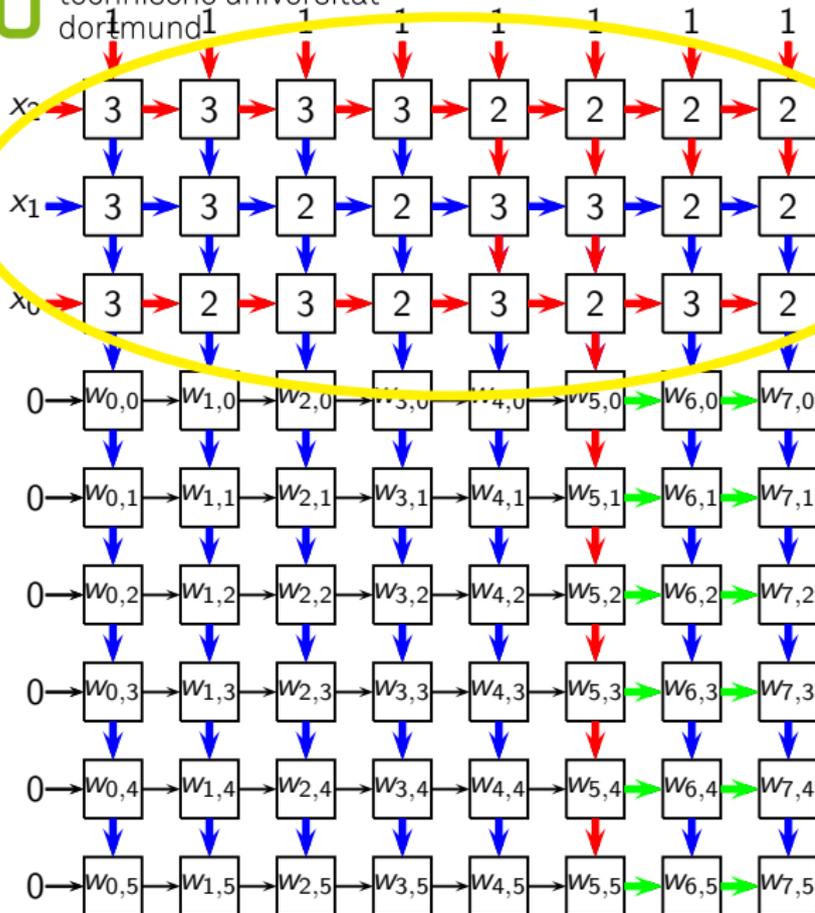
\vdots

$$w_{2^n-1} = w_{2^n-1,0} w_{2^n-1,1} w_{2^n-1,2} \cdots w_{2^n-1,m-1} \in \{0, 1\}^m$$

Benutze PLA mit $n + m$ Zeilen, 2^n Spalten

Beobachtung $m \cdot 2^n$ Zellen für $m \cdot 2^n$ zu speichernde Bits
 mindestens erforderlich

Adressierung mit jeweils n Bits
 in n zusätzlichen Zeilen



Beispiel

$n = 3, m = 6$

$2^3 = 8$ Wörter
jeweils 6 Bits

Beobachtung

Und-Teil fest

nur von Größe
abhängig

Anmerkung

PLAs mit festem
Und-Teil werden
als PROM
verkauft.

Zwischen-Fazit PLAs

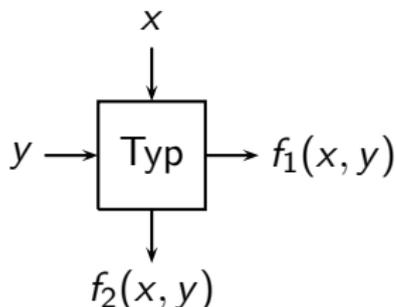
PLAs sind preiswerte, universelle Bausteine, die

- ▶ beliebige boolesche Funktionen leicht realisierbar machen,
- ▶ Minimalpolynomdarstellungen motivieren,
- ▶ Speicherung von 2^n Wörtern der Länge m in einem $(n + m) \times 2^n$ -PLA erlauben.

Nachteil nur einmal programmierbar

Wie kann man PLAs beliebig neu programmierbar machen?

„Software“-PLAs



Typ	s	t	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y)$
0	0	0	y	x
1	0	1	$x \vee y$	x
2	1	0	y	$x y$
3	1	1	y	$x \bar{y}$

klar vier verschiedene Typen, mit zwei Bits codierbar

Idee erweitere PLA-Baustein um zwei zusätzliche Eingaben, die den Baustein-Typ codieren

jetzt f_1 und f_2 als Funktionen von (s, t, x, y) darstellen

- ▶ $f_1(s, t, x, y) = y \vee \bar{s} t x$
- ▶ $f_2(s, t, x, y) = \bar{s} x \vee s x (t \oplus y)$

Bemerkung zum Einsatz

klar für ein $n \times m$ -PLA werden zur Programmierung $2nm$ Bits gebraucht.

Beobachtung Man kann diese $2nm$ Bits gut in einem PROM speichern.

Fazit

- ▶ einfache und günstige Realisierung von booleschen Funktionen
- ▶ besonders geeignet für kleine Stückzahlen
- ▶ besonders geeignet bei nur temporärem Gebrauch