technische universität
dortmund

Rechnerstrukturen WS 2011/12

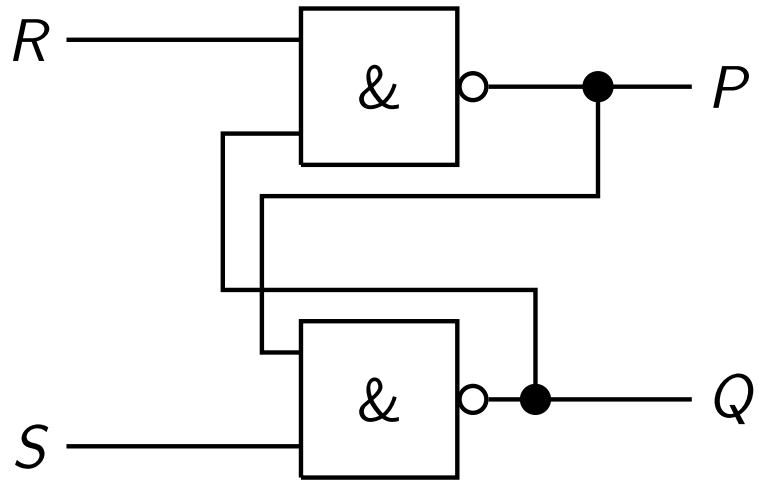
- Synchrone Schaltwerke
  - Einleitung
  - Flip-Flops
- Schaltwerk-Entwurf
  - Einleitung
  - von Neumann-Addierwerk

Hinweis: *Folien teilweise a. d. Basis von Materialien von Thomas Jansen*

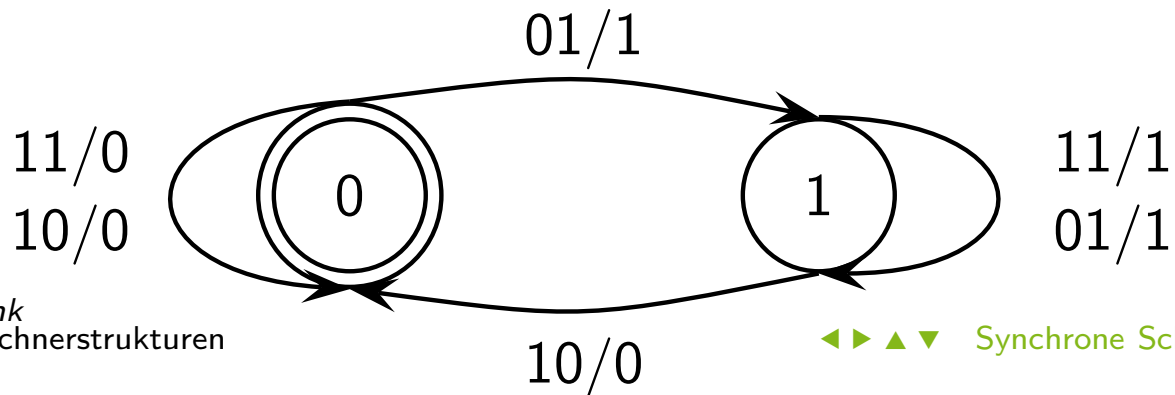
29. August 2011

Automaten und Schaltungen: Synchrone Schaltwerke

Erinnerung bi-stabile NAND-Kippstufe



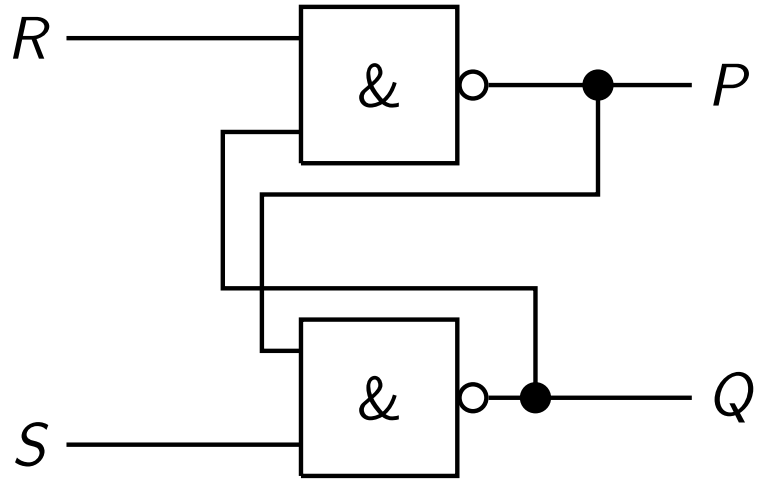
R_t	S_t	$P_{t+2\Delta}$	$Q_{t+2\Delta}$
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	P_t	$\overline{P_t}$



$$Q = \{0, 1\},\ q_0 = 0$$
$$\Sigma = \{01, 10, 11\}$$
$$\Delta = \{0, 1\}$$

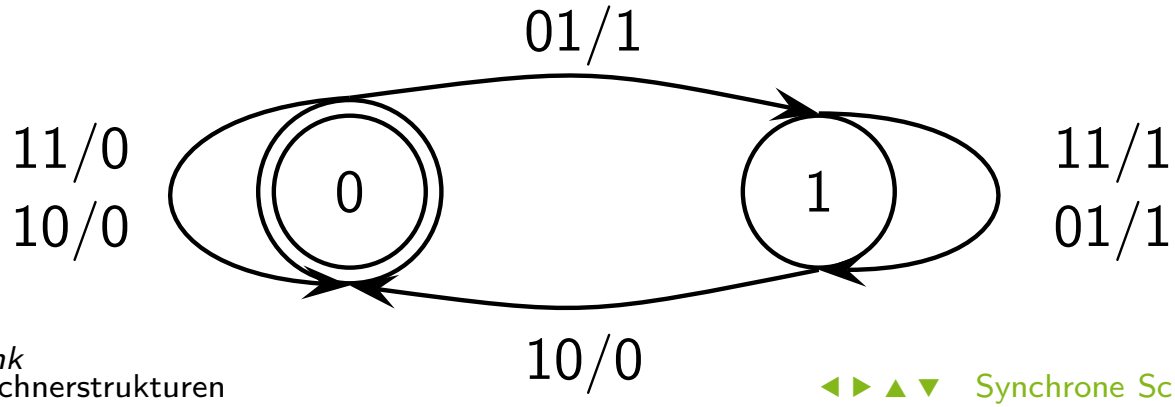
Vergleich Automat und NAND-Kippstufe

nicht getaktet



R_t	S_t	$P_{t+2\Delta}$	$Q_{t+2\Delta}$
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	P_t	$\overline{P_t}$

getaktet



$$Q = \{0, 1\},\ q_0 = 0$$
$$\Sigma = \{01, 10, 11\}$$
$$\Delta = \{0, 1\}$$

Synchrone Schaltwerke

ab jetzt getaktete Schaltwerke

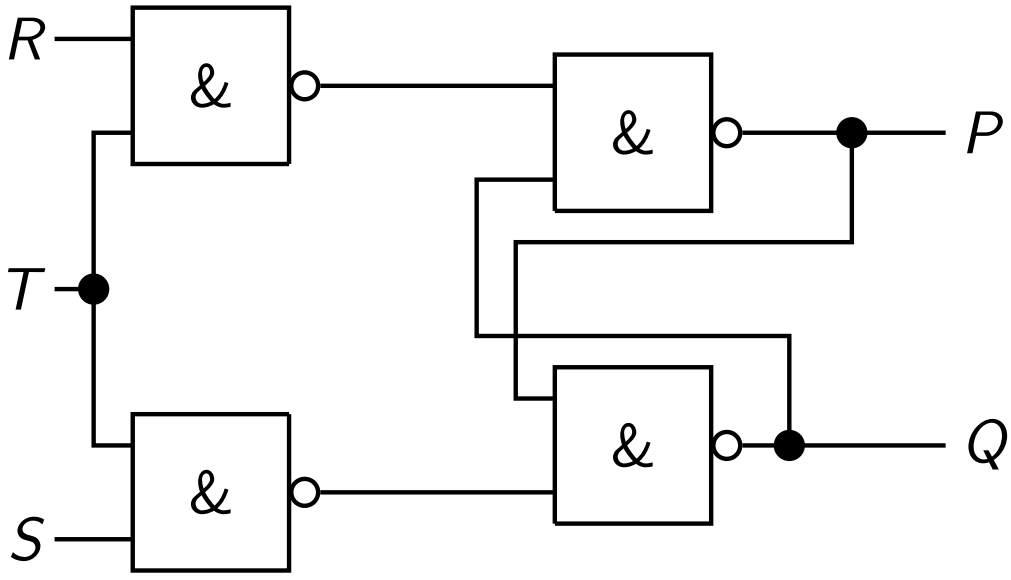
also Führe Taktsignal T ein

verschiedene technische Möglichkeiten

- Pegelsteuerung: aktiv, wenn 1 anliegt
- positive Flankensteuerung: aktiv, wenn Wechsel von 0 nach 1
- negative Flankensteuerung: aktiv, wenn Wechsel von 1 nach 0

digital-logische Ebene technisches Detail ignorieren

RS-Flip-Flop



R	S	Q
0	0	Q
0	1	1
1	0	0
1	1	nicht erlaubt

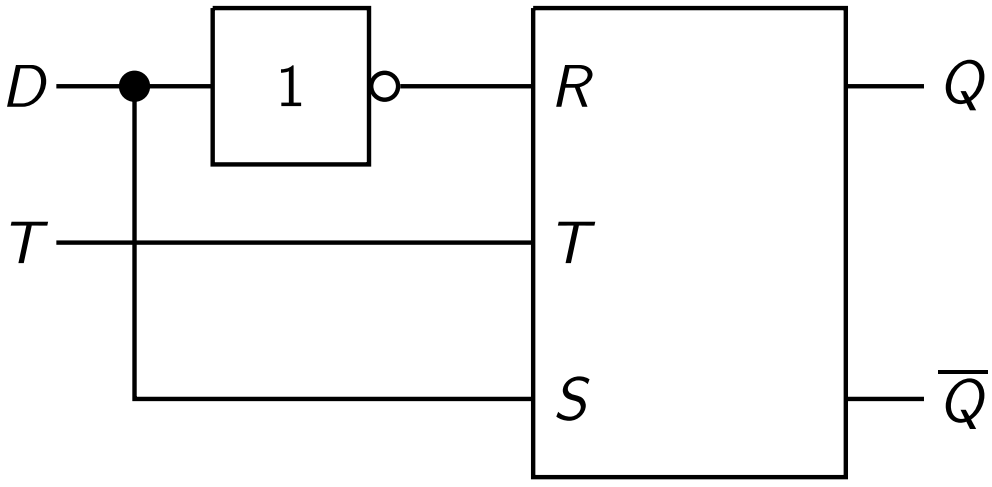
Zustandstabelle NAND-Kippstufe

R_t	S_t	$P_{t+2\Delta}$	$Q_{t+2\Delta}$
0	0	nicht erlaubt	
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	$\overline{Q_t}$	Q_t

Wertetabelle NAND

x	y	$\overline{x\,y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

D-Flip-Flop



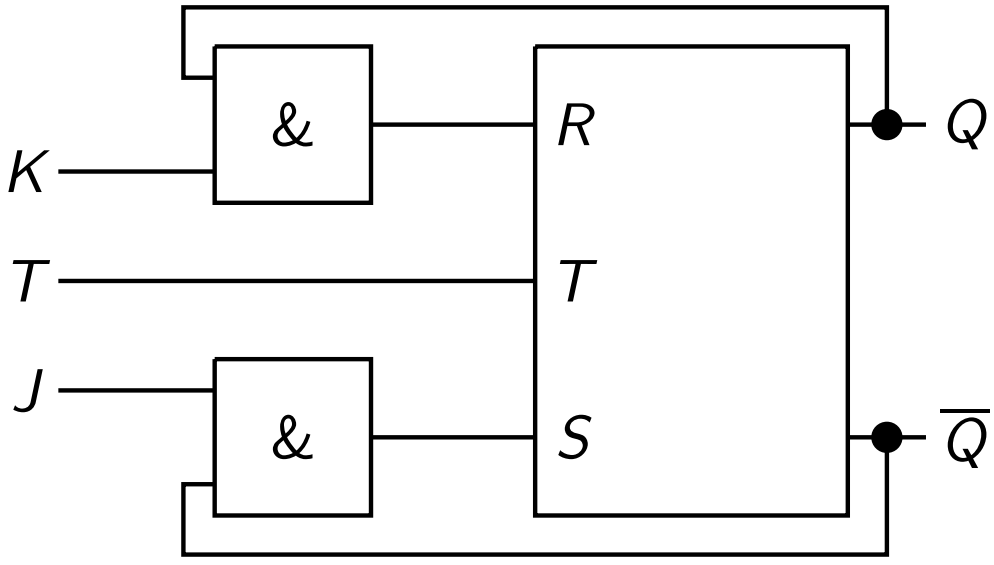
R	S	Q
0	0	Q
0	1	1
1	0	0
1	1	nicht erlaubt

D	Q
0	0
1	1

Sinnlos? Verzögerung um 1 Takt

Name Delay

JK-Flip-Flop

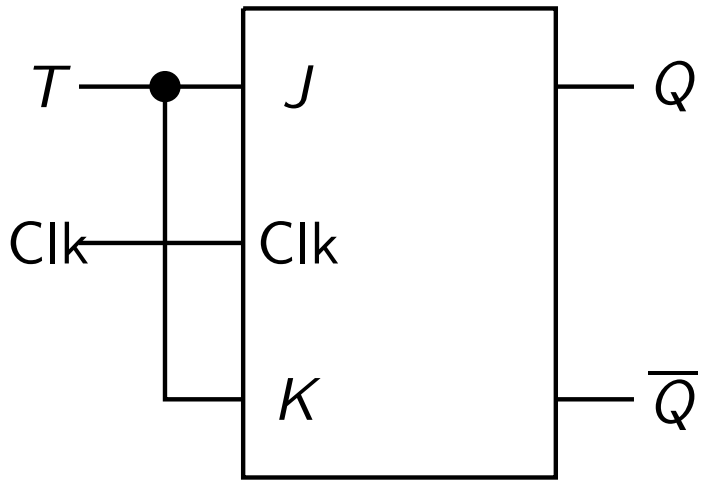


R	S	Q
0	0	Q
0	1	1
1	0	0
1	1	nicht erlaubt

J	K	R	S	Q
0	0	0	0	Q
0	1	Q	0	0
1	0	0	$\overline{Q}$	1
1	1	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q}$

positiv alle Eingaben erlaubt, sinnvolle Funktionalität, vielseitig

T-Flip-Flop



J	K	Q
0	0	Q
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q}$

T	Q
0	Q
1	$\overline{Q}$

Name Toggle

Flip-Flops

Wir haben also hier 4 verschiedene Flip-Flop-Typen

Wozu brauchen wir eigentlich Flip-Flops?

klar Realisierung von Speicher

Was müssen wir für den Einsatz als Speicher wissen?

klar gezielte Änderung von Speicherinhalten

also Zustandstabellen eigentlich nicht interessant

besser Ansteuertabellen

etwas präziser

Zustandstabelle	Ansteuertabelle
Eingabe $\Rightarrow$ Zustand	Ist-Zustand, Soll-Zustand $\Rightarrow$ Eingabe

Anmerkung Ansteuertabellen können „don't care“ enthalten

Ansteuertabelle D-Flip-Flop

Zustandstabelle

D	Q
0	0
1	1

Ansteuertabelle

Q_{alt}	Q_{neu}	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beobachtung Ansteuerung D vom alten Zustand unabhängig

Ansteuertabelle T-Flip-Flop

Zustandstabelle

T	Q
0	Q
1	$\overline{Q}$

Ansteuertabelle

Q_{alt}	Q_{neu}	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Beobachtung Kenntnis des „alten“ Zustands erforderlich

Ansteuertabelle RS-Flip-Flop

Zustandstabelle

R	S	Q
0	0	Q
0	1	1
1	0	0
1	1	nicht erlaubt

Ansteuertabelle

Q_{alt}	Q_{neu}	R	S
0	0	$*$	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	$*$

Beobachtung wenn Zustand nicht wechselt, gibt es Freiheit in der Ansteuerung

Ansteuertabelle JK-Flip-Flop

Zustandstabelle

J	K	Q
0	0	Q
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q}$

Ansteuertabelle

Q_{alt}	Q_{neu}	J	K
0	0	0	$*$
0	1	1	$*$
1	0	$*$	1
1	1	$*$	0

Beobachtung immer Freiheit in der Ansteuerung

Unvollständig definierte Ansteuerfunktionen

Wir haben für RS-Flip-Flops und JK-Flip-Flops
nur partiell definierte Ansteuerfunktionen

Ist das ungünstig?

Nein!

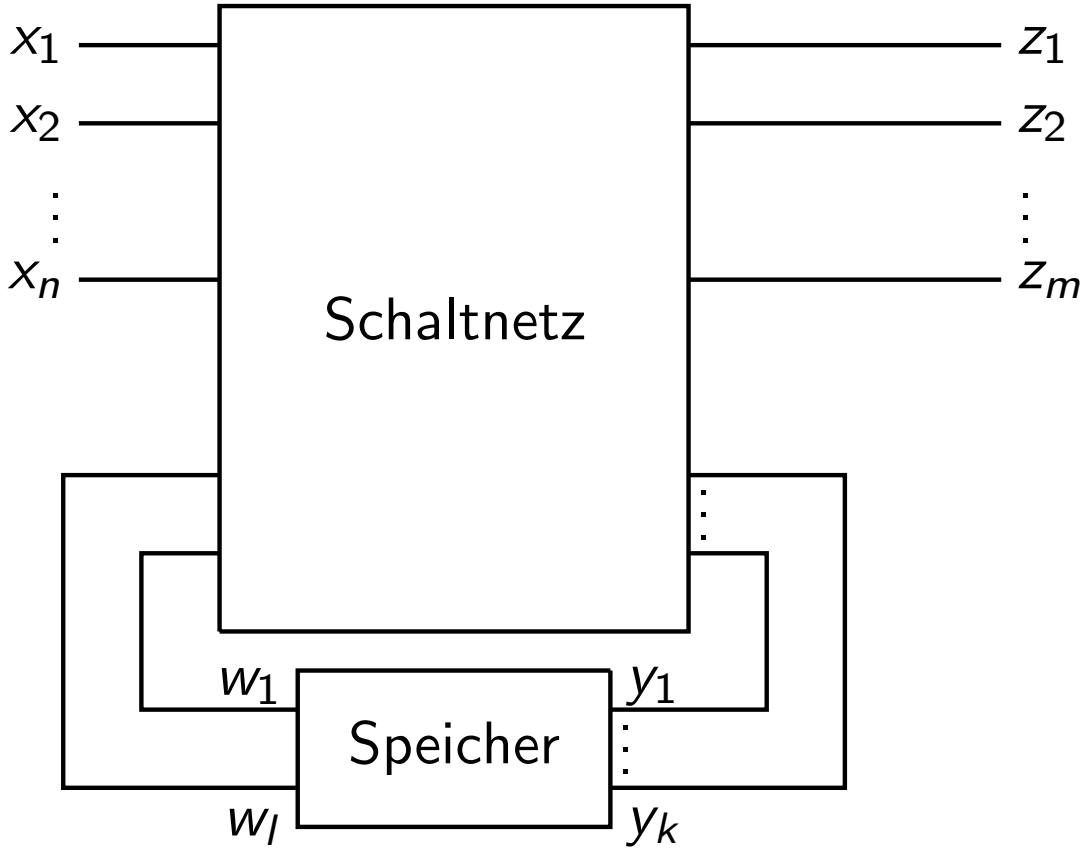
Erinnerung Minimalpolynome für partiell definierte Funktionen

Erinnerung Realisierungen können wesentlich einfacher sein

Erinnerung Minimalpolynom für partiell definiertes f
durch PI für f_1 und Überdeckung von f_0

Huffmann Schaltwerk-Modell

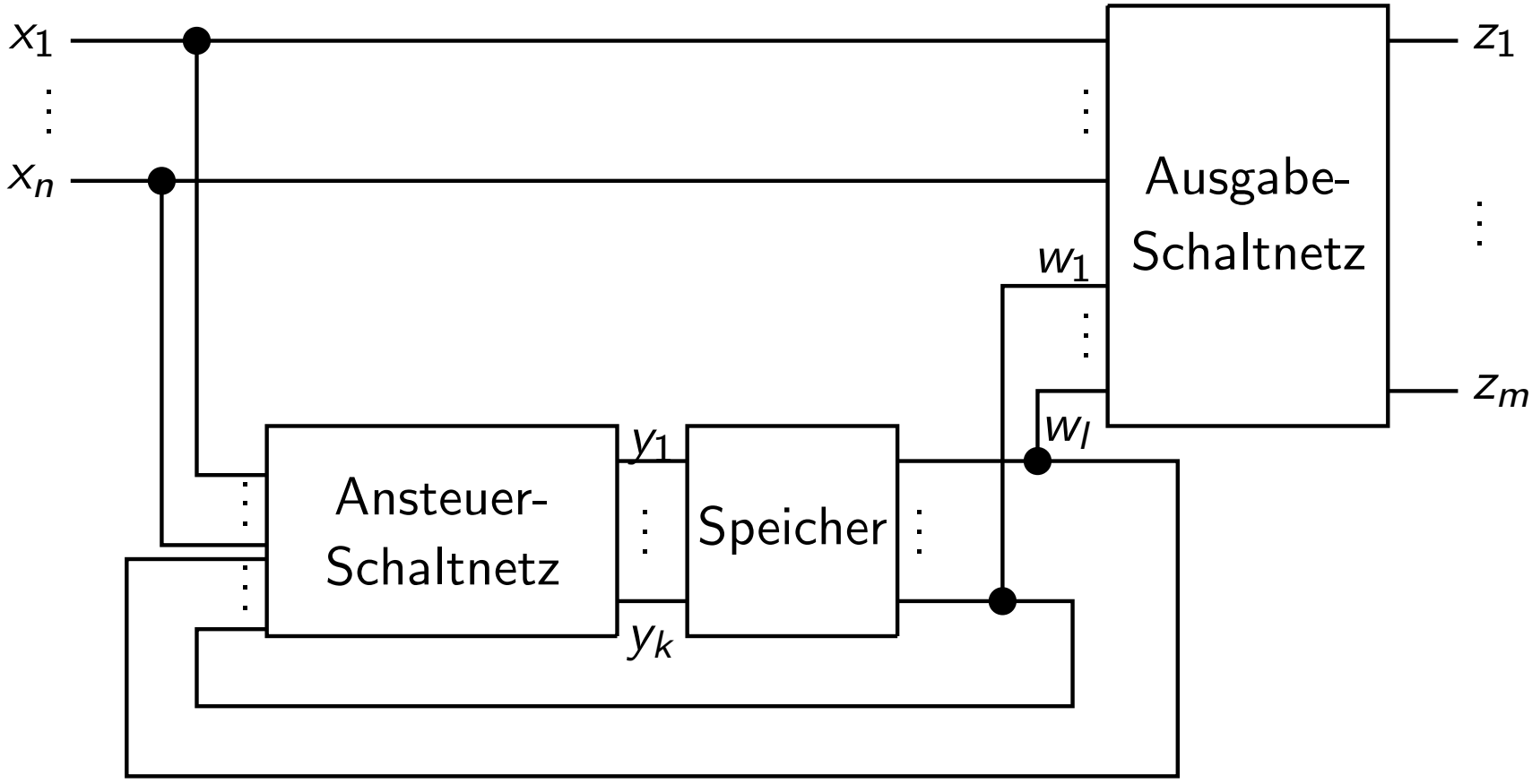
ein allgemeines, formales Schaltwerkmodell



Beobachtung führt Gelerntes über Schaltnetze, Flip-Flops und Automaten sinnvoll zusammen

Huffmann Schaltwerk-Modell

etwas detaillierter



Schaltwerk-Entwurf

Wunsch strukturierter Schaltwerk-Entwurf

Was können wir überhaupt als Schaltwerk realisieren?

klar alles, was als Automat beschrieben werden kann

zum Beispiel

- Getränke-Automat
- Ampelsteuerung
- Waschmaschinen-Steuerung
- ...

Anmerkung Heuristiken und Erfahrung sind wichtig

Schritte beim Schaltwerk-Entwurf

0. Verstehen der Aufgabe
1. Spezifikation des Verhaltens (z. B. als Mealy-Automat)
2. Wahl der Coderierung von Eingaben, Zuständen, Ausgaben
3. Wertetabelle mit Eingaben, Zustand, Ausgaben, neuem Zustand
4. Wahl der Flip-Flop-Typen
5. Ergänzung der Wertetabelle um die Flip-Flop-Ansteuerung
6. Entwurf passender boolescher Funktionen
7. Entwurf passender Schaltnetze
8. Entwurf vollständiges getaktetes Schaltwerk

Beispiel zum Schaltwerk-Entwurf

zur Einführung ein „praktisches“ Beispiel

hilfreich besonders gut verstandenes Problem

Aufgabe Addition von zwei Betragszahlen

Erinnerung wir haben

Verfahren	Größe	Tiefe
Schul-Methode	$\approx 5n$	$\approx 2n$
Carry-Look-Ahead	$\approx n^2$	$\approx 2\log_2 n$

jetzt klein und flach mit einem Schaltwerk
aber extrem langsam

Entwurf Addierwerk: Schritt 0

Schritt 0 verstehen der Aufgabe

Wunsch Summanden bitweise eingeben
Summe bitweise erhalten

klar geht nur von rechts nach links

Was muss man sich merken?

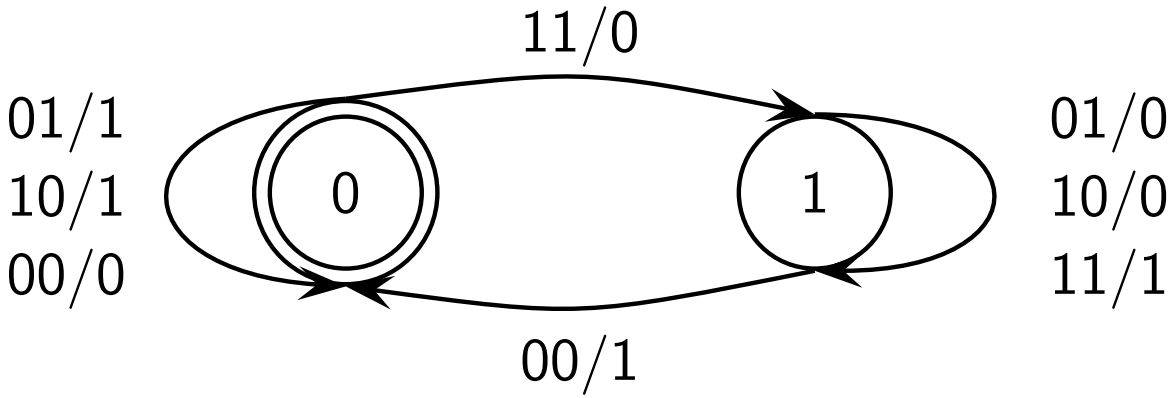
klar nur den aktuellen Übertrag
also 1 Bit

Entwurf Addierwerk: Schritt 1

Schritt 1 Spezifikation des Verhaltens

Entscheidung Beschreibung durch Mealy-Automat

Eingabealphabet $\Sigma = \{00, 01, 10, 11\}$
Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1\}$
Zustandsmenge $Q = \{0, 1\}$



Entwurf Addierwerk: Schritt 2

Schritt 2 Wahl der Codierung: Eingaben, Zuständen, Ausgaben

klar im Allgemeinen (fast) jede Freiheit

hier kanonische Codierung naheliegend

Codierung von Q

$q \in Q$	Codierung
0	0
1	1

Codierung von Σ

$w \in \Sigma$	Codierung
00	0 0
01	0 1
10	1 0
11	1 1

Codierung von Δ

$w \in \Delta$	Codierung
0	0
1	1

Entwurf Addierwerk: Schritt 3

Schritt 3 Wertetabelle Eingaben, Zustand, neuer Zustand, Ausgaben

naheliegend Eingaben heißen x, y
alter Zustand heißt c_{alt}
neuer Zustand heißt c_{neu}
Ausgabe heißt s

c_{alt}	x	y	c_{neu}	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Entwurf Addierwerk: Schritt 4

Schritt 4 Wahl der Flip-Flop-Typen

Entscheidung JK-Flip-Flops

Anmerkung

- nicht viele überzeugende Gründe
- weil es besonders viele Freiheiten erlaubt
- weil der Zustandswechsel nichts nahelegt
- weil es oft benutzt wird

Enturf Addierwerk: Schritt 5

Schritt 5 Ergänzung der Wertetabelle um Flip-Flop-Ansteuerung

c_{alt}	x	y	c_{neu}	s	J	K
0	0	0	0	0	0	$*$
0	0	1	0	1	0	$*$
0	1	0	0	1	0	$*$
0	1	1	1	0	1	$*$
1	0	0	0	1	$*$	1
1	0	1	1	0	$*$	0
1	1	0	1	0	$*$	0
1	1	1	1	1	$*$	0

Ansteuertabelle JK-Flip-Flop

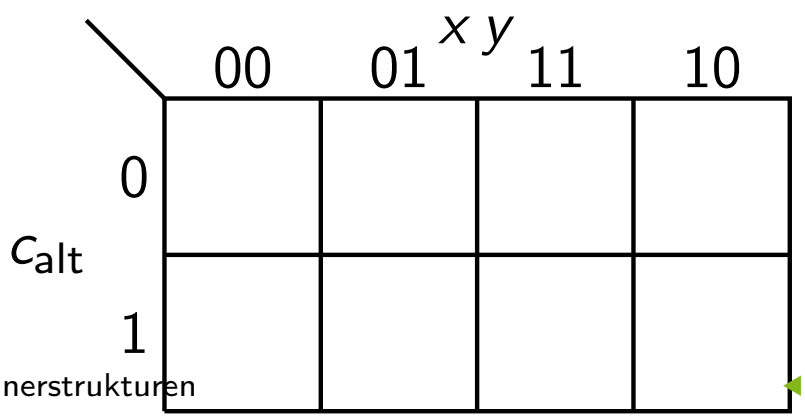
Q_{alt}	Q_{neu}	J	K
0	0	0	$*$
0	1	1	$*$
1	0	$*$	1
1	1	$*$	0

Entwurf Addierwerk: Schritt 6

Schritt 6 Entwurf passender boolescher Funktionen

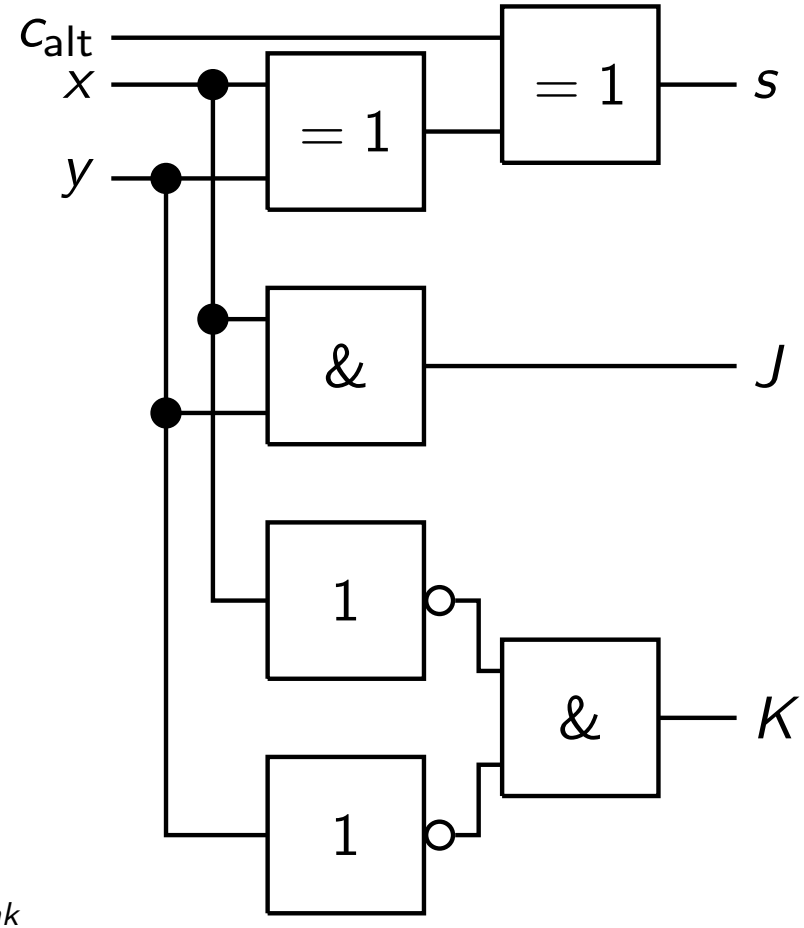
c_{alt}	x	y	c_{neu}	s	J	K
0	0	0	0	0	0	$*$
0	0	1	0	1	0	$*$
0	1	0	0	1	0	$*$
0	1	1	1	0	1	$*$
1	0	0	0	1	$*$	1
1	0	1	1	0	$*$	0
1	1	0	1	0	$*$	0
1	1	1	1	1	$*$	0

$$J(c_{alt}, x, y) = x\,y$$
$$K(c_{alt}, x, y) = \overline{x}\,\overline{y}$$
$$s(c_{alt}, x, y) = c_{alt} \oplus x \oplus y$$



Entwurf Addierwerk: Schritt 7

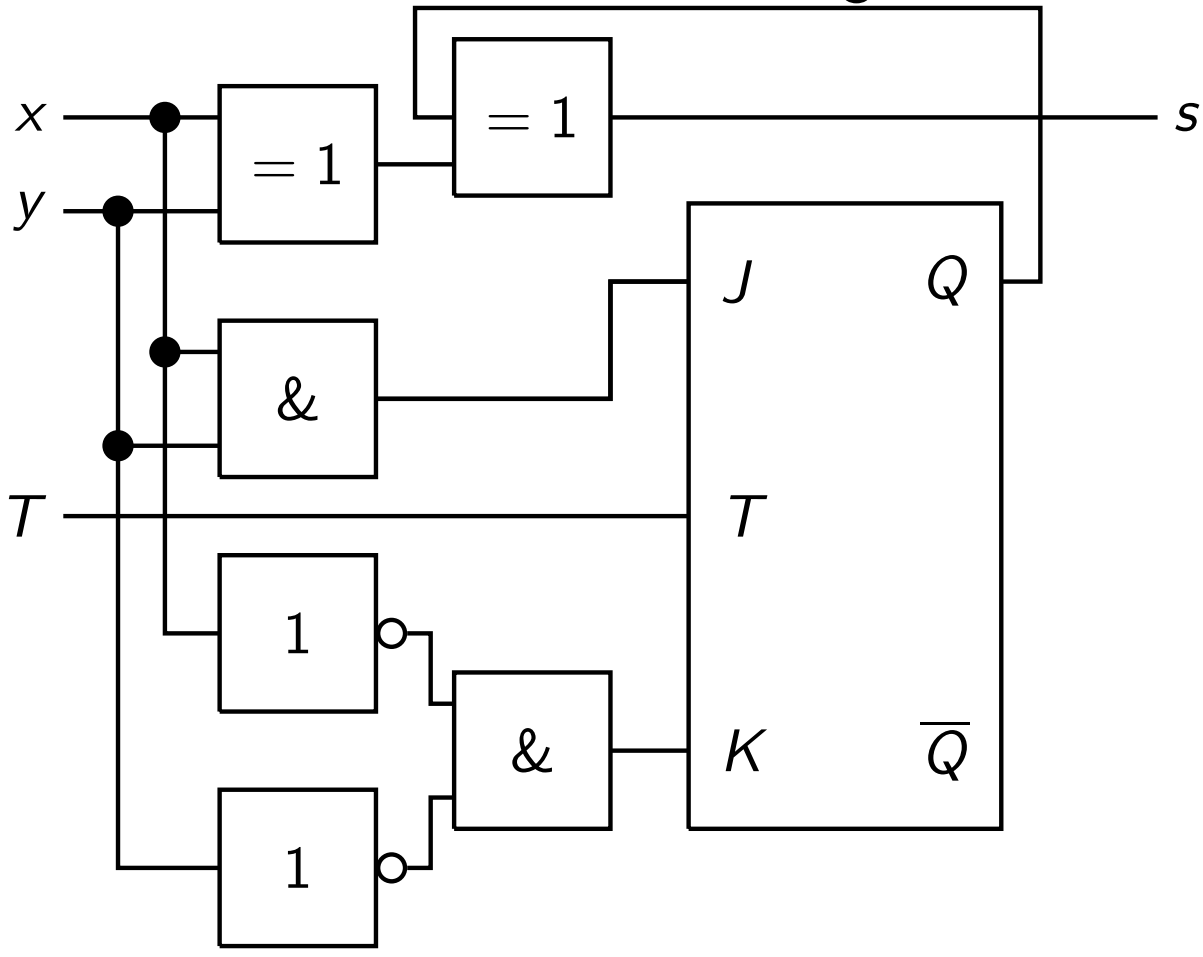
Schritt 7 Entwurf passender Schaltnetze



$$J(c_{alt}, x, y) = x\,y$$
$$K(c_{alt}, x, y) = \overline{x}\,\overline{y}$$
$$s(c_{alt}, x, y) = c_{alt} \oplus x \oplus y$$

Entwurf Addierwerk: Schritt 8

Schritt 8 Entwurf des vollständigen Schaltwerks



$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ +\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Beobachung Eingabe $(0,0)$ im letzten Takt wichtig

Initialisierung? Eingabe $(0,0)$

Unser Addierwerk: Serien-Addierer

Fazit

- addiert beliebig lange Betragszahlen
- ist sehr klein und flach
- ist sehr leicht zu initialisieren
- ist extrem langsam

Warum ist das Schaltwerk so langsam?

klar und bekannt wegen der Überträge

Müssen Überträge so lange dauern?

bekannt im Allgemeinen nicht (siehe Addierer)

aber Bei bit-weiser Eingabe schon!

Über unsere Modelle

Wir wissen schon Überträge werden nur manchmal lange weitergereicht.

Kann man ein Schaltwerk bauen, dass nur manchmal langsam ist?

Problem unsere Automaten können das zunächst nicht

Beobachtung bei Mealy- und Moore-Automat bestimmt Länge der Eingabe die Anzahl der Rechentakte

darum Modifikation des Automatenmodells

neu Erlaube leere Eingabe ε und signalisiere Ende der Rechnung durch Rechenende-Zeichen

Beobachtung Das ist fundamental neu für uns. Rechenzeit kann von der Eingabe abhängen (nicht nur von der Eingabelänge).

Auf dem Weg zum besseren Addierwerk

Wie wollen wir vorgehen?

Beobachtung Eingaben müssen sofort ganz zur Verfügung stehen
sonst kann man nicht schneller sein

also Eingabealphabet $\Sigma = \{0,1\}^{2n}$

Eingabe $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_1y_0 \in \{0,1\}^{2n}$

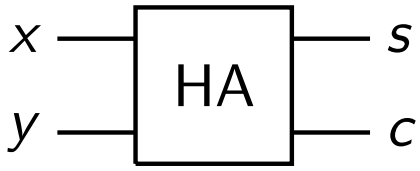
interpretieren als

$$\begin{array}{cccccc} & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_0 \\ + & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_0 \\ \hline \end{array}$$

bekannte Idee zur Lösung
Ersetze x und y durch x' und y' mit $x + y = x' + y'$
so lange, bis $y' = 0$ gilt.

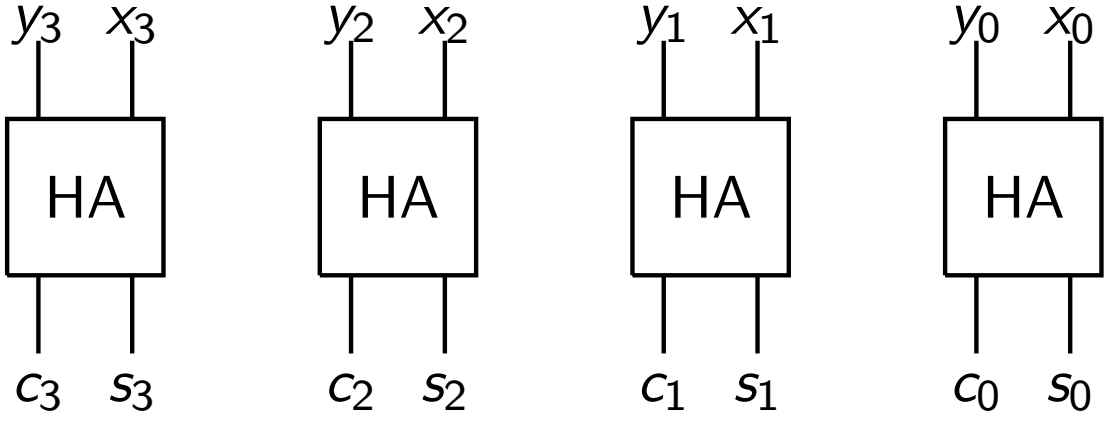
Eine gute Idee verallgemeinern

Erinnerung Wir kennen das schon vom Halbaddierer...



mit $x + y = 2c + s = (c0)_2 + s$

klar Das funktioniert auch für alle n Stellen parallel.



$$x_3' \, x_2' \, x_1' \, x_0' \quad = \quad s_3 \, s_2 \, s_1 \, s_0$$

Ü $y_3' \, y_2' \, y_1' \, y_0' \quad = \quad c_3 \, c_2 \, c_1 \, c_0 \, 0$

Fortschritt? in y hinten „neue“ 0

also nach $\leq n$ Takten $y = 0$

Noch offene Fragen

Was ist mit dem Ü?

klar potenziell kann in jedem Takt vorne ein Überlauf entstehen

Also bis zu n Überläufe speichern?

zum Glück nein

Wir wissen höchstens 1 Überlauf insgesamt

Wann ist die Rechnung fertig?

klar Rechnung fertig $\Leftrightarrow y = 0$

also „done“ $d = \overline{y_0 \vee y_1 \vee \cdots \vee y_{n-1}} = \neg \bigvee_{i=0}^{n-1} y_i$

jetzt unsere Ideen zusammensetzen

Das von Neumann-Addierwerk

John von Neumann (1903–1957)

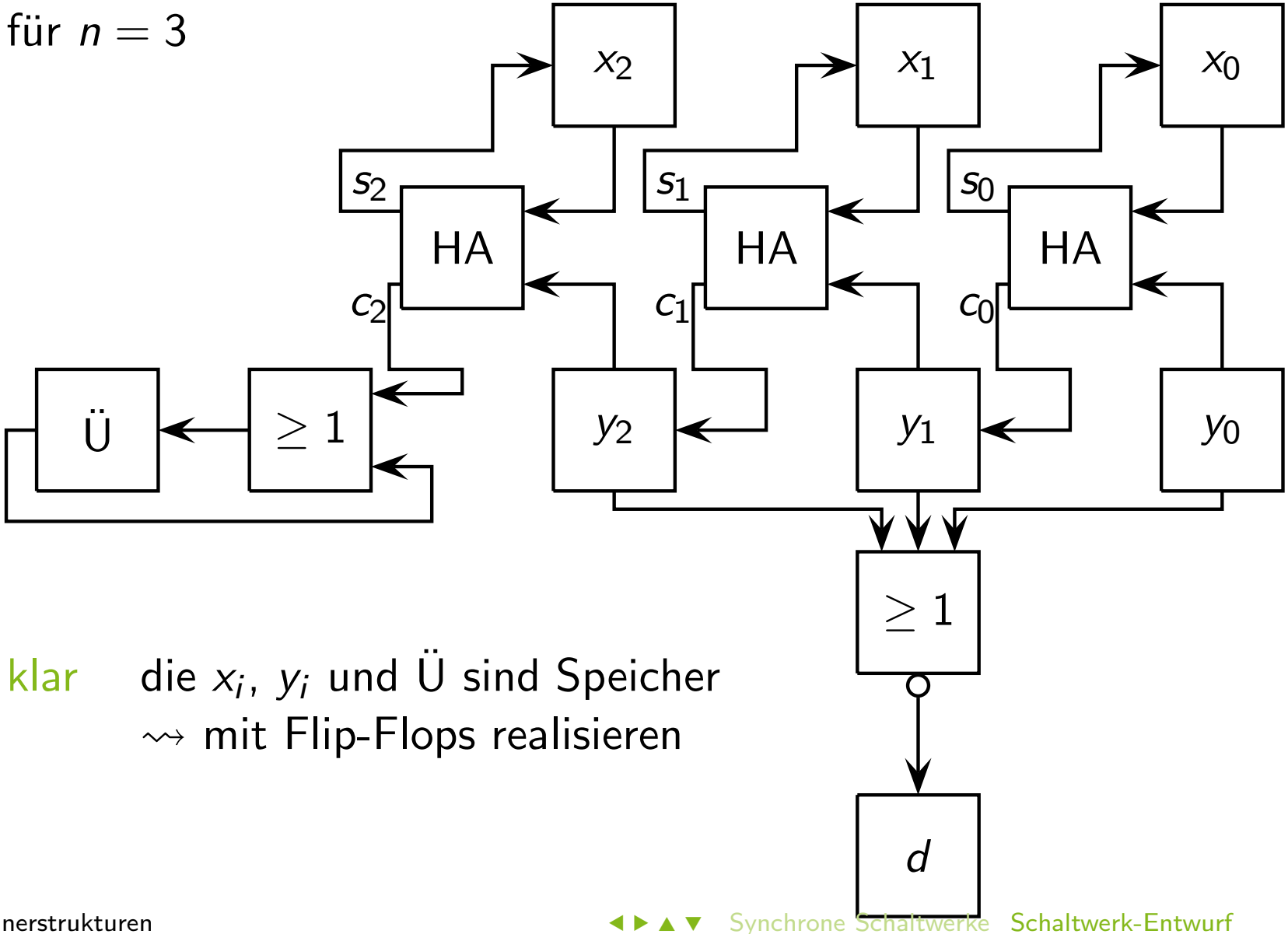
Ideen

- Schaltwerk bekommt direkt Summanden komplett
- Eingabe ε wird erlaubt
- Rechenende-Zeichen signalisiert Ende der Rechnung
- in jedem Takt ersetze x, y durch x', y' mit $x + y = x' + y'$
- Ersetzung stellenweise mit Halbaddierern

Hoffnung oft schnell

Schematische Darstellung von Neumann-Addierwerk

für $n = 3$



klar die x_i, y_i und Ü sind Speicher

$\rightsquigarrow$ mit Flip-Flops realisieren