Rechnerstrukturen

Michael Engel und Peter Marwedel

TU Dortmund, Fakultät für Informatik

WS 2013/14

Folien a. d. Basis von Materialien von Gernot Fink und Thomas Jansen

14. Oktober 2013

1. Einleitung
   - Historische Entwicklung von Rechnern
   - Einordnung
2. Repräsentation von Daten
   - Repräsentation natürlicher Zahlen
3. Organisatorisches
   - Vorlesung
   - Übungen
   - Übungsanmeldung

Historische Entwicklung von Rechnern

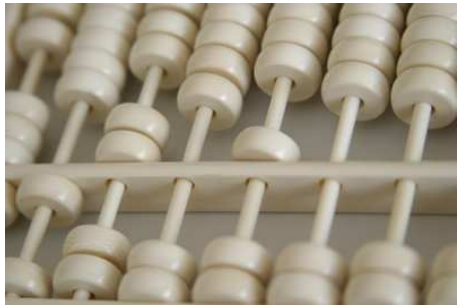
Zielsetzung:

ursprünglich immer Automatisierung von Berechnungen ("schneller", "fehlerfreier") in der Verwaltung, beim Militär, in der Wissenschaft

→ siehe auch Heinz Nixdorf MuseumsForum, Paderborn (http://www.hnf.de/)

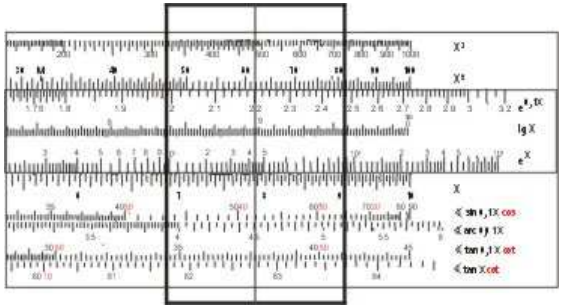
Rechenhilfsmittel

- Abakus (ca. 200 n.Chr. In China)



Quelle: Arithmeum, Bonn

- Rechenschieber (ca. 1620)

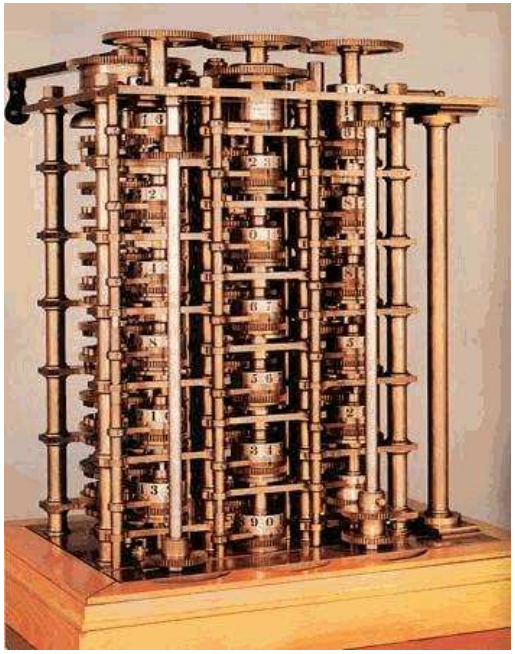


Historische Entwicklung von Rechnern II

Mechanische Rechenmaschinen (1642-1945)

- *Blaise Pascal* (1623–1662)
  Erste funktionsfähige Rechenmaschine für Addition/Subtraktion
- *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716)
  Rechenmaschine für 4 Grundrechenarten, Zahlen in Binärdarstellung

Quelle: Deutsches Museum, München



Quelle: Univ. Alabama

- *Charles Babbage* (1791–1871)
  Difference Engine (Add./Sub.),
  Analytical Engine (programmierbar!)

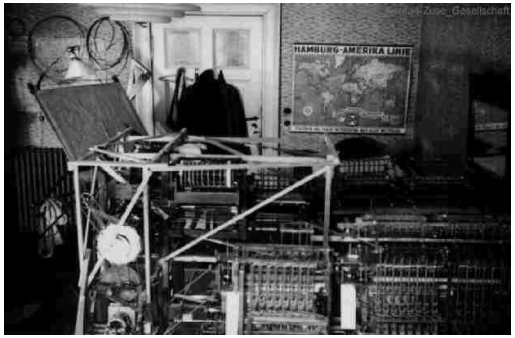
Historische Entwicklung von Rechnern III

... mechanische Rechenmaschinen (1642-1945)

- *Herman Hollerith* (1860-1929)
  Lochkarten zur Datenspeicherung (erstmals um 1800 zur Steuerung mechanischer Webstühle)

Quelle: HNF, Paderborn

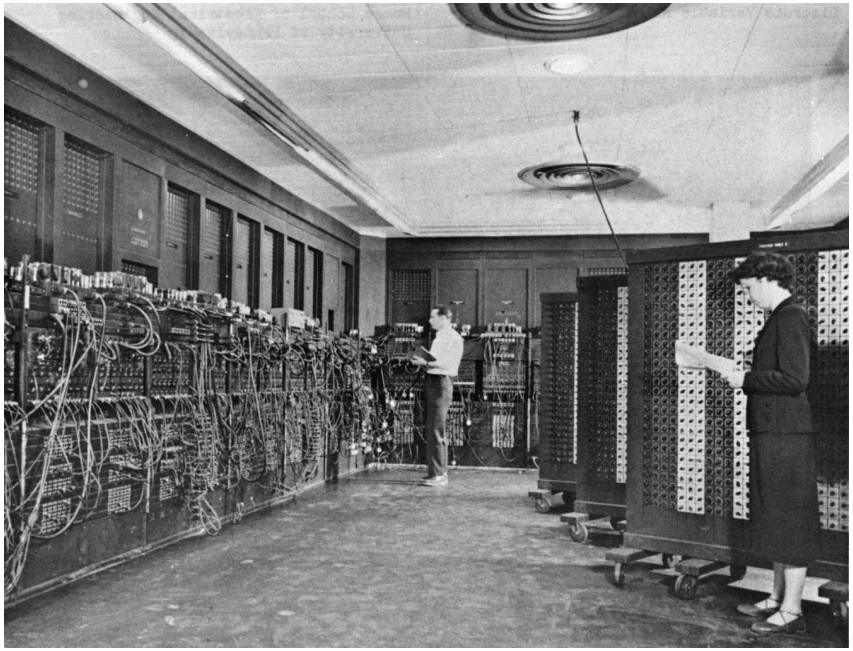
- *Konrad Zuse* (1910-1995)
  Z1 (1937/38): erster programmgesteuerter Rechenautomat



Historische Entwicklung von Rechnern IV

Die 1. Generation: Vakuumröhren (1945-1955)

- *COLOSSUS* (1943)
  unter Mitwirkung von Alan Turing: Britisches Geheimprojekt zur Entschlüsselung des ENIGMA-Codes
- *ENIAC* (1946): erster elektronischer Universalrechner
  18000 Röhren, 1500 Relais, 30t, 140kW



Quelle: worldpress.com

Historische Entwicklung von Rechnern V

... die 1. Generation: Vakuumröhren (1945-1955)

- *John von Neumann*
  Konzeption eines speicherprogrammierbaren Digitalrechners
  Speicher, Rechen-, Steuer- und E/A-Einheiten
- *IBM 701* (1953): erster wissenschaftlicher Rechner

Quelle: IBM

Historische Entwicklung von Rechnern VI

Die 2. Generation: Transistoren (1955-1965)

- TX-0 als erster transistor-basierter Rechner am M.I.T. entwickelt
- Digital Equipment Corporation gegründet (1957):

  PDP-1: erster Minicomputer
  PDP-8: verwendet erstmals
  ein Bus-System

- Control Data Corporation (CDC, *Seymour Cray*) Modell 6600 (1964):
  erster Supercomputer
  10-mal schneller als IBM-Top-Modell,
  parallele Funktionseinheiten,

  speziell für number crunching

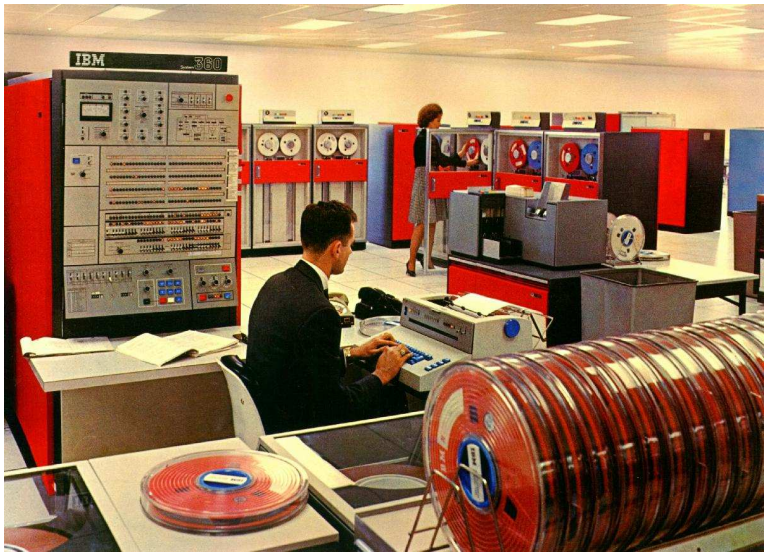
- Burroughs B5000: Rechner speziell für ALGOL 60

CDC 6600

Historische Entwicklung von Rechnern VII

Die 3. Generation: Integrierte Schaltungen (1965-1980)

- IBM führt mit System/360 eine einzige Produktlinie ein
  Mehrprogrammbetrieb, Emulation anderer Rechner
- PDP-11: erfolgreichster Minicomputer im wissenschaftlichen Bereich



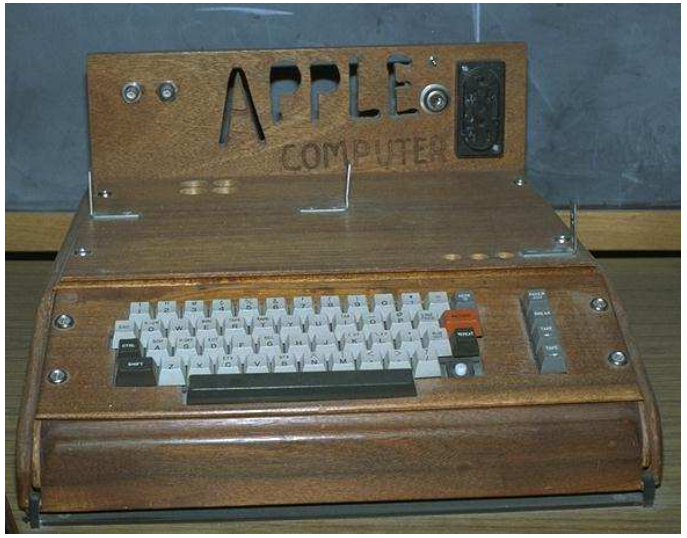
IBM 360 (Quelle: Univ. of Nottingham)

Digital Equipment PDP-11

Historische Entwicklung von Rechnern VIII

Die 4. Generation: VLSI-Integration (seit 1980)

höhere Integrationsdichte macht persönliche Rechner möglich



Quelle: Smithsonian Museum

- Erster PC als Bausatz auf Basis des Intel 8080
- CP/M Betriebssystem für 8080-Rechner (diskettenbasiert)
- Steve Jobs & Steve Wozniak bauen den Apple
- IBM-PC auf Intel 8088-Basis mit Standardkomponenten (1981)

  offener, dokumentierter Standard wird von anderen Firmen geklont, Betriebssystem MS-DOS [Rechte verbleiben bei Microsoft]
- Mitte der 80er Jahre: RISC-Rechner entstehen (SPARC, MIPS)

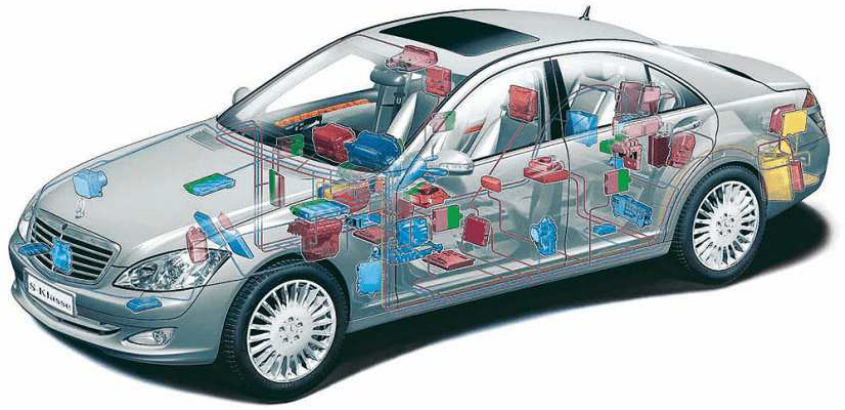
  extrem kleiner Instruktionsvorrat, Mikroprogrammebene wird abgeschafft

Historische Entwicklung von Rechnern IX

Pervasive / Ubiquitous Computing (heute)
extreme Integrationsdichte ermöglicht die Einbettung von Rechnern in quasi beliebige Artefakte des täglichen Lebens

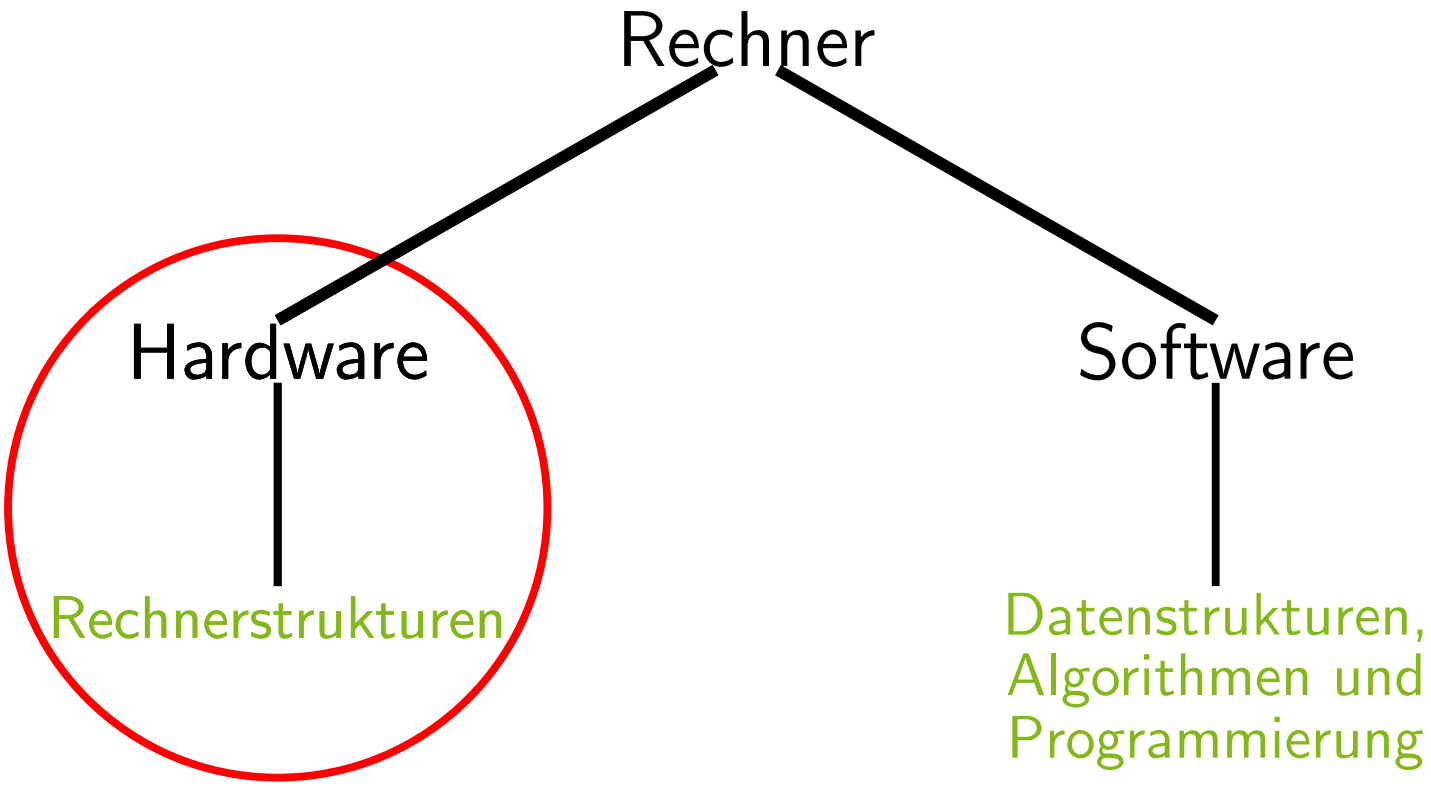
Quelle: websites.am

- Mobiltelephone und persönliche Assistenten
- Kraftfahrzeuge
  ca. 100 Steuergeräte [= Rechner] in Oberklasse-Fahrzeug

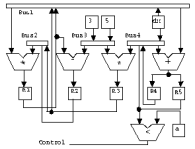
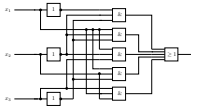
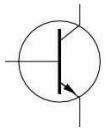
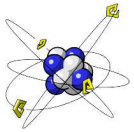


Quelle: freenet.de

Rechner


Rechner
Hardware
Software
Rechnerstrukturen
Datenstrukturen,
Algorithmen und
Programmierung

Hardware: Abstraktionsebenen

5	Programmiersprachenebene (z. B. Java, C++)	DAP 1	Informatik
4	Assemblerprogrammebene (z. B. mov ebx, d00ah)	RS	
3	Mikroarchitekturebene	RS	
2	Registertransferebene 	RS	
1	digital-logische Ebene 	RS	
0	Transistor-Ebene 	ET& NRT	E-Technik
−1	physikalische Ebene 		Physik

Repräsentation von Daten

Erinnerung: Moderne Rechner arbeiten binär ($\rightarrow$ *Digital*rechner)

Grund:

- technisch einfacher zu realisieren
- damit billiger zu realisieren
- bieten wohl-definierte Genauigkeit
- sind leichter zu programmieren

Problem: Wie repräsentiert man mit nur zwei Grundzuständen ...

- Zahlen? ... natürliche, ganze, reelle Zahlen?
- Texte?
- andere Daten?

Darstellung natürlicher Zahlen

Braucht man für unendlich viele Zahlen unendliche viele Symbole?

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...

Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ reichen aus.

Stellenwertsystem

$$13072 = 2 \cdot 1 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 1000 + 1 \cdot 10000$$

$10\,000$ $= 10^4$	$1\,000$ $= 10^3$	100 $= 10^2$	10 $= 10^1$	1 $= 10^0$
1	3	0	7	2

Stellenwertsysteme

10 Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ — **Basis** 10

Muss das so sein?

Behauptung Es geht mit jeder Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Basis b „Ziffern“ $\{0, 1, \ldots, b-1\}$

Schreibweise $(z_{\ell-1}\, z_{\ell-2}\, \cdots\, z_1\, z_0)_b$

Beispiel $(1\,3\,0\,7\,2)_{10} = 13072$

bei Basis b $>$ 10 manchmal „Ziffern“ A für 10, B für 11, ...

Umrechnung Basis $b \rightsquigarrow$ Basis 10

$$
\begin{aligned}
(3\,7\,4\,8)_{10} &= 8 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 \\
&= 8 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 1000 \\
&= 8 + 40 + 700 + 3000 \\
&= 3748
\end{aligned}
$$

Basis 10 $\rightsquigarrow$ Basis 10 — natürlich witzlos (trivial ;-)

Umrechnung Basis $b \rightsquigarrow$ Basis 10

ein anderes Beispiel Basis 7

$$
\begin{aligned}
(2\,1\,6\,4)_7 &= 4 \cdot 7^0 + 6 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^3 \\
&= 4 \cdot 1 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 49 + 2 \cdot 343 \\
&= 4 + 42 + 49 + 686 \\
&= 781
\end{aligned}
$$

Umrechnung Basis $b \rightsquigarrow$ Basis 10

und noch ein Beispiel Basis 2

$$
\begin{aligned}
(1\,0\,1\,1)_2 &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \\
&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 \\
&= 1 + 2 + 0 + 8 \\
&= 11
\end{aligned}
$$

Umrechnung Basis $b \rightsquigarrow$ Basis 10

und noch ein Beispiel Basis 16

$$
\begin{aligned}
(3\,\mathrm{E}\,\mathrm{C}\,9)_{16} &= 9 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^3 \\
&= 9 \cdot 1 + 12 \cdot 16 + 14 \cdot 256 + 3 \cdot 4\,096 \\
&= 9 + 192 + 3\,584 + 12\,288 \\
&= 16\,073
\end{aligned}
$$

Umrechnung Basis $b \rightsquigarrow$ Basis 10

ein letztes Beispiel Basis 60

$$
\begin{aligned}
(2\,48)_{60} &= 48 \cdot 60^0 + 2 \cdot 60^1 \\
&= 48 \cdot 1 + 2 \cdot 60 \\
&= 48 + 120 \\
&= 168
\end{aligned}
$$

für uns besonders wichtig Basis 2 (und Basis 10 natürlich)

auch wichtig Basis 16 Warum?

Basis 16

$16 = 2^4$

$(0)_{10}$	$=$	$(0)_{16}$	$=$	$(0)_2$	$(8)_{10}$	$=$	$(8)_{16}$	$=$	$(1000)_2$
$(1)_{10}$	$=$	$(1)_{16}$	$=$	$(1)_2$	$(9)_{10}$	$=$	$(9)_{16}$	$=$	$(1001)_2$
$(2)_{10}$	$=$	$(2)_{16}$	$=$	$(10)_2$	$(10)_{10}$	$=$	$(A)_{16}$	$=$	$(1010)_2$
$(3)_{10}$	$=$	$(3)_{16}$	$=$	$(11)_2$	$(11)_{10}$	$=$	$(B)_{16}$	$=$	$(1011)_2$
$(4)_{10}$	$=$	$(4)_{16}$	$=$	$(100)_2$	$(12)_{10}$	$=$	$(C)_{16}$	$=$	$(1100)_2$
$(5)_{10}$	$=$	$(5)_{16}$	$=$	$(101)_2$	$(13)_{10}$	$=$	$(D)_{16}$	$=$	$(1101)_2$
$(6)_{10}$	$=$	$(6)_{16}$	$=$	$(110)_2$	$(14)_{10}$	$=$	$(E)_{16}$	$=$	$(1110)_2$
$(7)_{10}$	$=$	$(7)_{16}$	$=$	$(111)_2$	$(15)_{10}$	$=$	$(F)_{16}$	$=$	$(1111)_2$

Basis 2 $\longleftrightarrow$ Basis 16

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

$$(0010\ 1011\ 0100\ 1001\ 1111)_2$$

$$= (2\,B\,4\,9\,F)_{16}$$

Namenskonventionen

Basis 10	**Dezimaldarstellung**
Basis 2	**Binärdarstellung** (Ziffern heißen **Bits**)
Basis 16	**Hexadezimaldarstellung** (korrekt eigentlich: *Sedezimalsystem*)

Beobachtung Binärdarstellung für die Repräsentation natürlicher Zahlen im Rechner geeignet

Umrechnung Basis 10 $\rightsquigarrow$ Basis b

Algorithmus 1

Eingabe Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, Betragszahl $n \in \mathbb{N}$

Ausgabe Repräsentation $(n_\ell\, n_{\ell-1} \cdots n_1\, n_0)_b$

1. $\ell := -1$
2. So lange $n > 0$ gilt
3. $\quad\quad \ell := \ell + 1$
4. $\quad\quad n_\ell := n - b \cdot \lfloor n/b \rfloor$
5. $\quad\quad n := \lfloor n/b \rfloor$

b	16	16	16	16	16
n	38 835	2 427	151	9	0
ℓ	-1	0	1	2	3
n_0		3	3	3	3
n_1			B	B	B
n_2				7	7
n_3					9

also $38\,835 = (9\,7\,\mathrm{B}\,3)_{16}$

Umrechnung Basis 10 $\rightsquigarrow$ Basis b

Algorithmus 1

Eingabe Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, Betragszahl $n \in \mathbb{N}$

Ausgabe Repräsentation $(n_\ell \, n_{\ell-1} \, \cdots \, n_1 \, n_0)_b$

1. $\ell := -1$
2. So lange $n > 0$ gilt
3. $\quad \ell := \ell + 1$
4. $\quad n_\ell := n - b \cdot \lfloor n/b \rfloor$
5. $\quad n := \lfloor n/b \rfloor$

b	16	16	16	16	16
n_3					9

Definition

Unter einem *Algorithmus* (auch Lösungsverfahren) versteht man eine genau definierte Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer bestimmten Art von Problemen in endlich vielen Schritten.

Quelle: Wikipedia

b-adische Darstellung – Eigenschaften

Theorem

Für jede Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich n eindeutig darstellen als

$$n = n_0 \cdot b^0 + n_1 \cdot b^1 + \cdots + n_\ell \cdot b^\ell = \sum_{i=0}^{\ell} n_i \cdot b^i$$

mit $\ell \in \mathbb{N}_0$, $n_0, n_1, \ldots, n_\ell \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $n_\ell > 0$.

Beweis (Existenz + Eindeutigkeit) im Anhang

Erstes Fazit

gesehen Einschränkung auf binäre Digitalrechner
in Bezug auf natürliche Zahlen
kein Problem $\surd$

als nächstes Repräsentation von

- Texten
- ganzen Zahlen (also auch negativen)
- rationalen Zahlen
- anderen Daten

Organisatorisches

Organisatorisches: Vorlesung

Rechnerstrukturen (4V+2Ü)

Termine	Mo 16.15–17.45 Uhr	(SG1 H001)
	Mi 16.15–17.45 Uhr	(SG1 H001)
Alternativtermine	Mo 18.15–19.45 Uhr	(SG1 H001)
	Mi 18.15–19.45 Uhr	(SG1 H001)

- regelmäßige Teilnahme – erwünscht
- regelmäßige Nachbereitung – erforderlich
  Faustregel Vorlesung : Nachbereitung $\widehat{=}$ 1 : 1
- Skript begleitend lesen – empfehlenswert
- Übungen dazu – erforderlich

Organisatorisches: Vorlesung II

Informationen
http://ls12-www.cs.tu-dortmund.de/daes/de/lehre/
→ Rechnerstrukturen

bei Fragen **Fragen!**

(in der Vorlesung), nach der Vorlesung, oder

wenn *sehr* dringend

Web-Forum	`http://inpud.cs.tu-dortmund.de`
zur Not auch	`Michael.Engel@tu-dortmund.de`
mit *viel* Glück	0231/755-6141

Organisatorisches: Übungen

Veranstalter Dr. Winfried Jansen
Timon Kelter
René Grzeszick [1]
Tobias Brinkjost
+ studentische Tutorinnen und Tutoren

[1] finanziert aus *Mitteln zur Verbesserung der Qualität der Lehre*

Anmeldung erfolgt web-basiert über ASSESS (Details folgen)

Regelmäßige und aktive Teilnahme sehr wichtig!

Übungsschein erforderlich zur Klausurteilnahme („Studienleistung“)

Studienleistungen

Anforderungen für erfolgreiche Übungsteilnahme

- regelmäßige Teilnahme
- erfolgreiche und regelmäßige Bearbeitung der Übungsaufgaben
  - $\geq$ 30% aller Punkte der Übungsblätter 1–3
  - $\geq$ 30% aller Punkte der Übungsblätter 4–6
  - $\geq$ 30% aller Punkte der Übungsblätter 7–9
  - $\geq$ 30% aller Punkte der Übungsblätter 10–12

Hinweis Gruppenabgaben erwünscht
Gruppengröße ≤ 3

Übungsanmeldung

Übungsanmeldung: Schritte

1. In ASSESS "Neuen Account erstellen" wählen
2. Daten eintragen (insbes. Matrikelnummer, Name, Email!)
3. Mit neuem Account im ASSESS anmelden
4. Bei "Rechnerstrukturen" Option "anzeigen" wählen
5. Prioritäten für ≥ 3 Übungsgruppen angeben
6. Für Gruppenanmeldungen (max. 3 Studierende) "Clique" erstellen, ID und Passwort an andere Mitglieder weitergeben

Anmeldefrist bis zum 17.10. 10:00 Uhr (prioitätenbasiert);
danach (gemäß FCFS) weiterhin bis 21.10. 12:00 Uhr;
später nur per EMail an Übungsbetreuer

Benachrichtigung über Übungszuteilung am 17.10. per Email

Übungsanmeldung: ASSESS

ess.cs.uni-dortmund.de/ASSESS/

| Suche > Los

technische universität dortmund

fakultät für informatik

ESS Eingebettete Systemsoftware

AnmeldungSSystem für ESS

Sie sind hier: TU Dortmund > Informatik > LS12 > ESS > ASSESS

ASSESS

Übungsanmeldung
Abgabe
Profil
Administration

AsSESS

(Probleme mit AsSESS, Verbesserungsvorschläge, Lob/Kritik? Mail an die ASSESS-Admins!)

LOGIN

Matrikelnr.:

Passwort:

Login

Noch kein Account? Neuen Account erstellen | Passwort vergessen?

ASSESS v1.5.37 — Team: Horst Schirmeier, Alexander Lochmann, Michael Lenz

Zuletzt geändert am 04.10.2012 11:17:32.

Anhang

Beweis: Korrektheit von Algorithmus 1!

Ist Algorithmus 1 korrekt? Warum?

1. Algorithmus 1 terminiert, weil n in jedem Schleifendurchlauf immer echt kleiner wird, ganzzahlig bleibt und nie negativ wird.
2. Algorithmus 1 ist korrekt, weil immer

$$n_{\text{Eingabe}} = n_0 \cdot b^0 + n_1 \cdot b^1 + \cdots + n_\ell \cdot b^\ell + n_{\text{aktuell}} \cdot b^{\ell+1}$$

gilt und am Ende $n_{\text{aktuell}} = 0$ ist.

Das muss man noch beweisen, weil es nicht offensichtlich ist!

Beweis der Behauptung

Behauptung

Es gilt immer:

$n_{\text{Eingabe}} = n_0 \cdot b^0 + n_1 \cdot b^1 + \cdots + n_\ell \cdot b^\ell + n_{\text{aktuell}} \cdot b^{\ell+1}$

am Anfang klar, weil $n_{\text{aktuell}} = n_{\text{Eingabe}}$ und $\ell = -1$

Wir behaupten

wenn es am Anfang eines Schleifendurchlaufs stimmt

dann auch am Ende dieses Schleifendurchgangs.

Begriff Invariante

Beweis Schleifendurchgang erhält Invariante

am Anfang des Durchgangs (Voraussetzung)

$n_{\text{Eingabe}} = n_0 \cdot b^0 + n_1 \cdot b^1 + \cdots + n_\ell \cdot b^\ell + n_{\text{aktuell}} \cdot b^{\ell+1}$

im Durchgang

$\ell \rightsquigarrow \ell + 1 \qquad n_{\ell_{\text{neu}}} = n_{\text{aktuell}} - b \cdot \lfloor n_{\text{aktuell}}/b \rfloor \qquad n_{\text{aktuell}} \rightsquigarrow \lfloor n_{\text{aktuell}}/b \rfloor$

also

$$\underbrace{n_0 \cdot b^0 + n_1 \cdot b^1 + \cdots + n_{\ell_{\text{alt}}} \cdot b^{\ell_{\text{alt}}}}_{\text{alte Teildarstellung}}$$

$$+\underbrace{(n_{\text{aktuell alt}} - b \cdot \lfloor n_{\text{aktuell alt}}/b \rfloor) \cdot b^{\ell_{\text{neu}}}}_{\text{neue Ziffer}} + \underbrace{\lfloor n_{\text{aktuell alt}}/b \rfloor}_{\text{neues } n_{\text{aktuell}}} \cdot b^{\ell_{\text{neu}}+1}$$

$$= n_0 \cdot b^0 + n_1 \cdot b^1 + \cdots + n_{\ell_{\text{alt}}} \cdot b^{\ell_{\text{alt}}}$$

$$+ b^{\ell_{\text{neu}}} \cdot (n_{\text{aktuell alt}} - b \cdot \lfloor n_{\text{aktuell alt}}/b \rfloor + \lfloor n_{\text{aktuell alt}}/b \rfloor \cdot b)$$

$$= n_0 \cdot b^0 + n_1 \cdot b^1 + \cdots + n_{\ell_{\text{alt}}} \cdot b^{\ell_{\text{alt}}} + b^{\ell_{\text{neu}}} \cdot n_{\text{aktuell alt}} = n_{\text{Eingabe}} \qquad \square$$

Beweisverfahren „gilt anfangs“ und „bleibt erhalten“
heißt vollständige Induktion

Beweis: b-adische Darstellung – Eigenschaften

Was muss überhaupt bewiesen werden?

1. Existenz Es gibt so eine Darstellung.
   Das beweist Algorithmus 1.
2. Eindeutigkeit Es gibt nur eine Darstellung dieser Art.

Beweismethode Beweis durch Widerspruch

1. Annahme des Gegenteils
2. logisch korrekte Folge von Schlüssen bis zu einer
3. falschen Aussage

b-adische Darstellung – Beweis der Eindeutigkeit

Voraussetzungen	Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Basis., Sei $n \in \mathbb{N}$.
Annahme	Seien $(n_\ell\, n_{\ell-1} \cdots n_0)_b \neq (n'_{\ell'}\, n'_{\ell'-1} \cdots n'_0)_b$ verschiedene Darstellungen von n.
O. B. d. A.	$\ell = \ell'$
	sonst kürzere Zahl vorne mit Nullen aufgefüllt.
Schluss	$k := \max\{i \in \{0, 1, \ldots, \ell\} \mid n_i \neq n'_i\}$
	ist wohldefiniert, weil Darstellungen verschieden
O. B. d. A.	$n_k > n'_k$
	sonst alle n_i und n'_i vertauschen
Schluss	$n = \sum_{i=0}^{\ell} n_i \cdot b^i > \sum_{i=0}^{\ell} n'_i \cdot b^i = n$
	weil $\sum_{i=0}^{j} (b-1) \cdot b^i = b^{j+1} - 1 < b^{j+1}$ gilt
	für alle $b, j \in \mathbb{N}$
Widerspruch	$n > n$ $\square$