Rechnerstrukturen

Michael Engel und Peter Marwedel

TU Dortmund, Fakultät für Informatik

WS 2013/14

Folien a. d. Basis von Materialien von Gernot Fink und Thomas Jansen 21. Oktober 2013

Boolesche Funktionen und Schaltnetze

Boolesche Funktionen

vielleicht schon bekannt Aussagenlogik

Satz ist Aussage mit eindeutigem Wahrheitswert

Wahrheitswerte wahr, falsch

neue zusammengesetzte Aussagen
durch Verknüpfung von Aussagen

Verknüpfungen

- Negation ($\neg$, „nicht“)
- Konjunktion ($\wedge$, „und“)
- Disjunktion ($\vee$, „oder“)

Definition der Verknüpfungen

Seien A, B zwei Aussagen.

Definition Negation

A	$\neg A$
falsch	wahr
wahr	falsch

Definition Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Definition Disjunktion

A	B	$A \vee B$
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	wahr

Boolesche Algebra

Definition 2

Wir nennen $(B, \cup, \cap, ^{-})$ mit $B = \{0, 1\}$ und $x \cup y = \max\{x, y\}$, $x \cap y = \min\{x, y\}$, $\overline{x} = 1 - x$ für alle $x, y \in B$ boolesche Algebra.

George Boole, englischer Mathematiker, 1815–1864

beobachte Entsprechungen:

$$\begin{array}{ccc} \text{falsch} & \Leftrightarrow & 0 \\ \text{wahr} & \Leftrightarrow & 1 \\ \wedge & \Leftrightarrow & \cap \\ \vee & \Leftrightarrow & \cup \\ \neg & \Leftrightarrow & ^{-} \end{array}$$

Rechengesetze

Satz 3

In der booleschen Algebra $(B, \cup, \cap, ^-)$ gilt für alle $x, y, z \in B$:

Kommutativität: $x \cup y = y \cup x$, $x \cap y = y \cap x$

Assoziativität: $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$,
$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$

Distributivität: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$,
$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

Neutralelemente: $x \cup 0 = x$, $x \cap 1 = x$

Nullelemente: $x \cup 1 = 1$, $x \cap 0 = 0$

Rechengesetze II

Satz 3 (cont.)

In der booleschen Algebra $(B, \cup, \cap, ^{-})$ gilt für alle $x, y, z \in B$ auch:

Idempotenz: $x = x \cup x = x \cap x$

Involution: $x = \overline{\overline{x}} = \neg\neg x$

Absorption: $(x \cup y) \cap x = x$, $(x \cap y) \cup x = x$

Resolution: $(x \cup y) \cap (\overline{x} \cup y) = y$, $(x \cap y) \cup (\overline{x} \cap y) = y$

Komplementarität: $x \cup (y \cap \overline{y}) = x$, $x \cap (y \cup \overline{y}) = x$

de Morgansche Regeln: $\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$, $\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$

Beweis Absorption

Absorption: $(x \cup y) \cap x = x$

x	y	$x \cup y$	linke Seite $(x \cup y) \cap x$	rechte Seite x	
0	0	0	0	0	$\checkmark$
0	1	1	0	0	$\checkmark$
1	0	1	1	1	$\checkmark$
1	1	1	1	1	$\checkmark$

Repräsentationen boolescher Funktionen

Definition 4

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f\colon B^n \to B^m$ heißt boolesche Funktion.

Notation B^n = Menge aller n-stelligen Tupel über B

Beispiel $B^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

Anzahl boolescher Funktionen

boolesche Funktion $f\colon B^n \to B^m$ als Wertetabelle darstellbar
mit $|B^n| = 2^n$ Zeilen
und $|B^m| = 2^m$ Möglichkeiten je Zeile

$\Rightarrow 2^{m^{2^n}} = 2^{m \cdot 2^n}$ boolesche Funktionen $f\colon B^n \to B^m$

Beispiel $2^{1\cdot 2^2} = 2^4 = 16$ boolesche Funktionen $f\colon B^2 \to B$

Alle booleschen Funktionen $f : B^2 \to B$

x	0	0	1	1			x	0	0	1	1		
y	0	1	0	1			y	0	1	0	1		
f_1	0	0	0	0	Nullfkt.	0	f_9	1	0	0	0	NOR	
f_2	0	0	0	1	AND	$\wedge$	f_{10}	1	0	0	1	Äquiv.	$\Leftrightarrow$
f_3	0	0	1	0			f_{11}	1	0	1	0	Negation	$\neg y$
f_4	0	0	1	1	Proj.	x	f_{12}	1	0	1	1		
f_5	0	1	0	0			f_{13}	1	1	0	0	Negation	$\neg x$
f_6	0	1	0	1	Proj.	y	f_{14}	1	1	0	1	Impl.	$\Rightarrow$
f_7	0	1	1	0	XOR	$\oplus$	f_{15}	1	1	1	0	NAND	
f_8	0	1	1	1	OR	$\vee$	f_{16}	1	1	1	1	Einsfkt.	1

Verwenden im Weiteren $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion), $\bar{\ }$ (Negation)

Darstellung boolescher Funktionen

gerade gesehen Wertetabelle
(Orientierung meistens wie hier)

x	y	f_7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

bei fester Reihenfolge Wertevektor

$f_7\colon (0, 1, 1, 0)$

Index und Minterm

Index	x	y	f_7	
0	0	0	0	nicht einschlägig
1	0	1	1	einschlägig
2	1	0	1	einschlägig
3	1	1	0	nicht einschlägig

Definition

Die boolesche Funktion, für die nur der Index i einschlägig ist, heißt Minterm zum Index i.

Ein Minterm ist nur mit Negationen und Konjunktionen darstellbar:

$$x_j = \begin{cases} 0 & \rightsquigarrow \overline{x_j} \\ 1 & \rightsquigarrow x_j \end{cases}$$

und dann Konjunktion all dieser Literale ($\hat{=}$ [negierte] Variable)

Beispiel zu Index und Minterm

Index	x_1	x_2	f_7	
0	0	0	0	nicht einschlägig
1	0	1	1	einschlägig
2	1	0	1	einschlägig
3	1	1	0	nicht einschlägig

Beispiel Minterm zum Index $2 = (1\,0)_2$, also
$m_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge \overline{x_2}$

Index	x_1	x_2	$x_1\,\overline{x_2}$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0

Hinweis: In der Regel abkürzende Notation der Konjunktion, z.B.:
$x_1 \wedge \overline{x_2} \quad \rightsquigarrow \quad x_1\,\overline{x_2}$

Normalformen

Für wie viele Eingaben liefert ein Minterm 1?

klar für genau 1

Folgerungen

- Disjunktion aller Minterme zu einschlägigen Indizes einer booleschen Funktion f ist wieder f
- XOR-Verknüpfung aller Minterme zu einschlägigen Indizes einer booleschen Funktion f ist wieder f

Normalformen

Definition 8

- Die Darstellung von f als Disjunktion all ihrer Minterme zu einschlägigen Indizes heißt disjunktive Normalform (DNF).
- Die Darstellung von f als XOR-Verknüpfung all ihrer Minterme zu einschlägigen Indizes heißt Ringsummen-Normalform (RNF).

Anmerkung Normalformen sind eindeutig.

Beispiel

Index	x	y	f_7	Minterm
0	0	0	0	$\overline{x}\,\overline{y}$
1	0	1	1	$\overline{x}\,y$
2	1	0	1	$x\,\overline{y}$
3	1	1	0	$x\,y$

DNF von f_7 $\overline{x}\,y \vee x\,\overline{y}$

RNF von f_7 $\overline{x}\,y \oplus x\,\overline{y}$

Funktionale Vollständigkeit

Beobachtung jede boolesche Funktion $f\colon B^n \to B$ nur mittels Konjunktion, Disjunktion und Negation darstellbar (z. B. durch ihre DNF)

Definition 5

Eine Menge $\mathcal{F}$ von booleschen Funktionen heißt funktional vollständig, wenn sich jede boolesche Funktion durch Einsetzen und Komposition von Funktionen aus $\mathcal{F}$ darstellen lässt.

Satz 6

$\{\wedge, \vee, \neg\}$ ist funktional vollständig.

Funktionale Vollständigkeit

Gibt es kleinere funktional vollständige Mengen?

Behauptung $\{\vee, \neg\}$ und $\{\wedge, \neg\}$ sind beide funktional vollständig.

Beobachtung Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass $\{\wedge, \vee, \neg\}$ darstellbar ist.

Beweis.

Anwendung der de Morgan-Regeln (Satz 3)

$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \quad \Rightarrow \quad \{\vee\}$ mit $\{\wedge, \neg\}$ darstellbar

$x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \quad \Rightarrow \quad \{\wedge\}$ mit $\{\vee, \neg\}$ darstellbar $\square$

Kleinste funktional vollständige Mengen

Wie viele Funktionen für funktionale Vollständigkeit mindestens?

Satz 7

$\{\mathrm{NAND}\}$ ist funktional vollständig.

Beweis.

Es genügt, $\{\neg, \vee\}$ mit NAND darzustellen.

$\neg x = \mathrm{NAND}(x, x)$

x	$\neg x$	$\mathrm{NAND}(x, x)$
0	1	1
1	0	0

$x \vee y = \mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(x, x), \mathrm{NAND}(y, y))$

x	y	$x \vee y$	$\neg x$	$\neg y$	$\mathrm{NAND}(\mathrm{NAND}(x, x), \mathrm{NAND}(y, y))$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1

□

Vorsicht, Notation!

Anmerkung $\overline{x\,y} \neq \overline{x}\,\overline{y}$

$$\overline{x\,y} = \neg(x\,y)$$
$$\overline{x}\,\overline{y} = (\neg x) \wedge (\neg y)$$

x	y	$\overline{x\,y}$	$\overline{x}\,\overline{y}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Maxterme

Minterm-Darstellung betont Funktionswert 1.

Definition

Die boolesche Funktion, für die nur der Index i nicht einschlägig ist, heißt Maxterm zum Index i.

Beobachtung Definition Maxterm unterscheidet sich nur in „nicht“ von Definition Minterm

Beobachtung m_i Minterm zum Index i, M_i Maxterm zum Index i
$\Rightarrow M_i = \neg m_i$

Beobachtung Konjunktion aller Maxterme zu nicht einschlägigen Indizes einer booleschen Funktion f ist wieder f

Normalformen

Fortsetzung von Definition 8

- Die Darstellung von f als Konjunktion all ihrer Maxterme zu nicht einschlägigen Indizes heißt konjunktive Normalform (KNF).

Beispiel

Index	x	y	z	f_{bsp}	$x \vee y \vee \overline{z}$	$x \vee \overline{y} \vee z$	$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
2	0	1	0	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1	1	0
4	1	0	0	1	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1
6	1	1	0	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Darstellungen boolescher Funktionen

Wozu stellt man boolesche Funktionen dar?

- Realisierung
- Verifikation
- Fehleranalyse
- Synthese
- ...

Wo stellt man boolesche Funktionen dar?

- auf dem Papier
- im Computer

Probleme

- Wertetabelle, Wertevektor immer groß
- Normalformen oft groß
- Normalformen unterstützen gewünschte Operationen kaum

Wunsch   andere Repräsentation

Eine Datenstruktur für boolesche Funktionen

Ziel $f\colon B^n \to B$ darstellen

Wünsche

- zu einer Belegung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ schnell den Funktionswert $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ausrechnen können
- Funktionen schnell auf Gleichheit testen können
- Funktionen schnell manipulieren (z. B. eine Variable konstant setzen) können
- schnell eine Null-Eingabe/eine Eins-Eingabe finden können
- Funktionen möglichst klein repräsentieren
- ...

Ordered Binary Decision Diagrams

OBDDs

erster Schritt — Festlegen einer Variablenordnung π
(z. B. $\pi = (x_3, x_1, x_2, x_4)$)

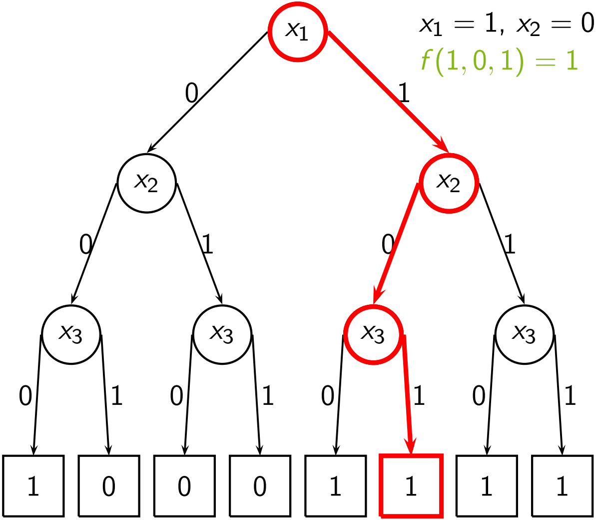
dann — Baue πOBDD aus Knoten x_4 oder $\boxed{1}$

und Kanten $x_3 \xrightarrow{1} x_2$ nach folgenden Regeln:

- Knoten mit Variablen, 0 oder 1 markiert
- Kanten mit 0 oder 1 markiert
- Variablen-Knoten mit je einer ausgehenden 0- und 1-Kante
- Konstanten-Knoten ohne ausgehende Kante
- genau ein Knoten ohne eingehende Kante
- Kanten zwischen Variablenknoten beachten π

πOBDD – Ein Beispiel

Variablenordnung $\pi = (x_1, x_2, x_3)$



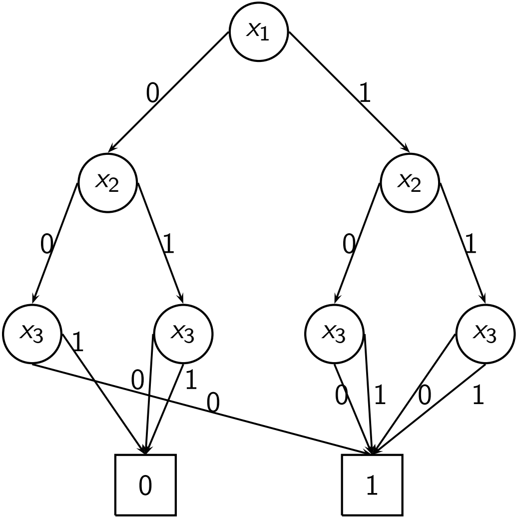
Beispiel Auswertung $f(1,0,1)$

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

$f(1,0,1) = 1$

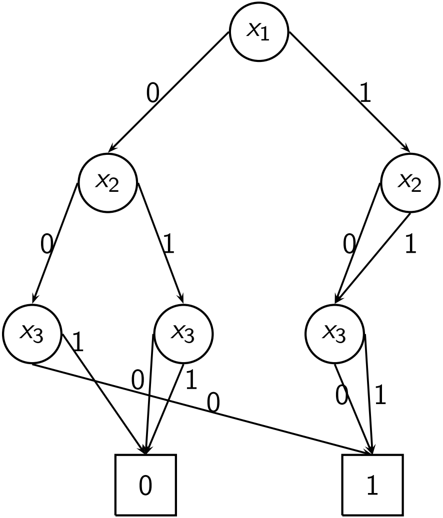
πOBDD-Größe

gleichartige Senken verschmelzen



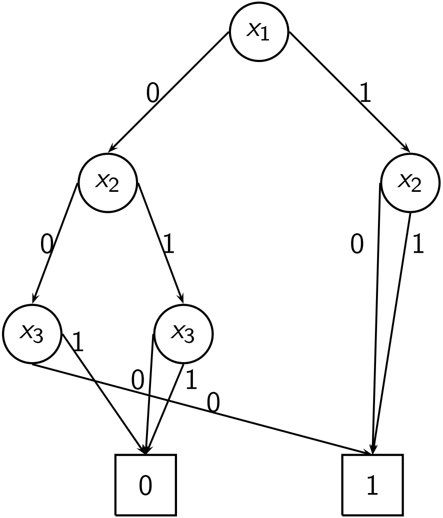
πOBDD-Größe

gleichartige Knoten verschmelzen



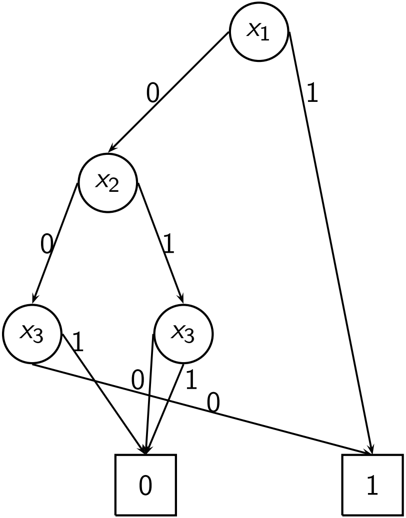
πOBDD-Größe

Knoten ohne Einfluss eliminieren



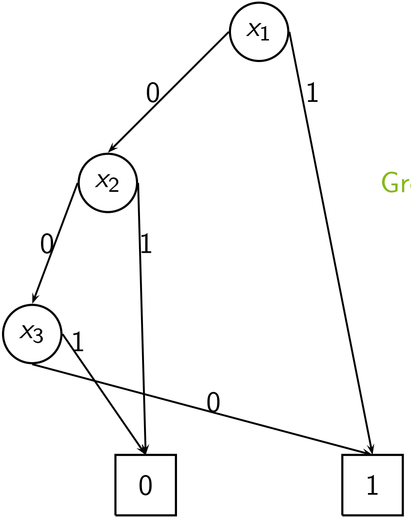
πOBDD-Größe

Knoten ohne Einfluss eliminieren



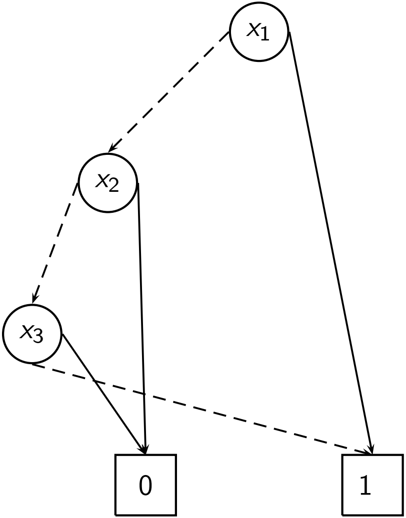
πOBDD-Größe

Knoten ohne Einfluss eliminieren



Größe minimal

Alternative Darstellung eines πOBDDs



OBDD-Reduzierung

Satz 9

Die erschöpfende Anwendung der

- Verschmelzungsregel „Knoten mit gleicher Markierung und gleichen Nachfolgern können verschmolzen werden" und
- Eliminationsregel „Ein Knoten mit gleichem Null- und Einsnachfolger kann entfernt werden"

in beliebiger Reihenfolge führt zum reduzierten πOBDD.

reduziert = minimale Größe und eindeutig