technische universität
dortmund

fakultät für informatik

# Rechnerstrukturen, Teil 1

## Vorlesung 4 SWS WS 19/20

Prof. Dr. Jian-Jia Chen
Fakultät für Informatik – Technische Universität Dortmund
jian-jia.chen@cs.uni-dortmund.de
http://ls12-www.cs.tu-dortmund.de

# Übersicht

1. Organisatorisches ✓
2. Einleitung ✓
3. **Repräsentation von Daten**
4. Boolesche Funktionen und Schaltnetze
5. Rechnerarithmetik
6. Optimierung von Schaltnetzen
7. Programmierbare Bausteine
8. Synchrone Schaltwerke

# 3. Repräsentation von Daten

## 3. Repräsentation von Daten

1. Repräsentation von natürlichen Zahlen ✓
2. **Repräsentation von Texten**
3. Repräsentation ganzer Zahlen
4. Repräsentation rationaler Zahlen
5. Repräsentation anderer Daten

# 3.2 Repräsentation von Texten

**Beobachtung**

*Alles, was wir wissen, können wir aufschreiben.*

**Folgerung**

*Repräsentation von Texten ist zentral.*

**Naiver Ansatz**

- Codierung A → 0, B → 1, . . .
- und dann Binärcodierung

**Probleme**

- Welche Zeichen sollen codiert werden?
- Wie kann man Daten mit anderen austauschen?

**Lösung**: **Definition von Standards**

# 3.2 Repräsentation von Texten

**Texte**: Zeichenfolgen aus Buchstaben und Satzzeichen

- Darstellung mittels Bitfolgen
- Codierung jedes Buchstabens / Zeichens durch Bitfolge

**ASCII** = American Standard Code for Information Interchange

- 7 Bit (= max. 128 Zeichen), Tabelle mit Nummerierung aller Zeichen
- z.B. „a“ hat Nummer 97, „A“ hat Nummer 65, „?“ hat Nummer 63
- Klein- und Großbuchstaben nach Alphabet durchnummeriert
- übliche Erweiterung auf PCs: 8bit, weitere Sonderzeichen, z.B. Umlaute
- Erweiterung in Europa: Latin-1, (nach Norm ISO 8859-1)

**Unicode**, z.B. von Java verwendet

- 16 Bit (= max. 65536 Zeichen)
- siehe http://www.unicode.org
- als Obermenge weltweit geläufiger Zeichensätze

# 3.2 Repräsentation von Texten

## ASCII-Tabelle (7 Bit)

| | ....000 | ....001 | ....010 | ....011 | ....100 | ....101 | ....110 | ....111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000... | NUL | SOH | STX | ETX | EOT | ENQ | ACK | BEL |
| 0001... | BS | HT | LF | VT | FF | CR | SO | SI |
| 0010... | DLE | DC1 | XON | DC3 | XOF | NAK | SYN | ETB |
| 0011... | CAN | EM | SUB | ESC | FS | GS | RS | US |
| 0100... | | ! | " | # | $ | % | & | ' |
| 0101... | ( | ) | * | + | , | - | . | / |
| 0110... | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0111... | 8 | 9 | : | ; | < | = | > | ? |
| 1000... | @ | A | B | C | D | E | F | G |
| 1001... | H | I | J | K | L | M | N | O |
| 1010... | P | Q | R | S | T | U | V | W |
| 1011... | X | Y | Z | [ | \ | ] | ^ | _ |
| 1100... | ` | a | b | c | d | e | f | g |
| 1101... | h | i | j | k | l | m | n | o |
| 1110... | p | q | r | s | t | u | v | w |
| 1111... | x | y | z | { | \| | } | ~ | DEL |

# 3.2 Repräsentation von Texten

## ISO 8859-1 (8 Bit)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0020 | 0 0030 | @ 0040 | P 0050 | ` 0060 | p 0070 | 00A0 | ° 00B0 | À 00C0 | Ð 00D0 | à 00E0 | ð 00F0 |
| ! 0021 | 1 0031 | A 0041 | Q 0051 | a 0061 | q 0071 | ¡ 00A1 | ± 00B1 | Á 00C1 | Ñ 00D1 | á 00E1 | ñ 00F1 |
| " 0022 | 2 0032 | B 0042 | R 0052 | b 0062 | r 0072 | ¢ 00A2 | ² 00B2 | Â 00C2 | Ò 00D2 | â 00E2 | ò 00F2 |
| # 0023 | 3 0033 | C 0043 | S 0053 | c 0063 | s 0073 | £ 00A3 | ³ 00B3 | Ã 00C3 | Ó 00D3 | ã 00E3 | ó 00F3 |
| $ 0024 | 4 0034 | D 0044 | T 0054 | d 0064 | t 0074 | ¤ 00A4 | ´ 00B4 | Ä 00C4 | Ô 00D4 | ä 00E4 | ô 00F4 |
| % 0025 | 5 0035 | E 0045 | U 0055 | e 0065 | u 0075 | ¥ 00A5 | µ 00B5 | Å 00C5 | Õ 00D5 | å 00E5 | õ 00F5 |
| & 0026 | 6 0036 | F 0046 | V 0056 | f 0066 | v 0076 | ¦ 00A6 | ¶ 00B6 | Æ 00C6 | Ö 00D6 | æ 00E6 | ö 00F6 |
| ' 0027 | 7 0037 | G 0047 | W 0057 | g 0067 | w 0077 | § 00A7 | · 00B7 | Ç 00C7 | × 00D7 | ç 00E7 | ÷ 00F7 |
| ( 0028 | 8 0038 | H 0048 | X 0058 | h 0068 | x 0078 | ¨ 00A8 | ¸ 00B8 | È 00C8 | Ø 00D8 | è 00E8 | ø 00F8 |
| ) 0029 | 9 0039 | I 0049 | Y 0059 | i 0069 | y 0079 | © 00A9 | ¹ 00B9 | É 00C9 | Ù 00D9 | é 00E9 | ù 00F9 |
| * 002A | : 003A | J 004A | Z 005A | j 006A | z 007A | ª 00AA | º 00BA | Ê 00CA | Ú 00DA | ê 00EA | ú 00FA |
| + 002B | ; 003B | K 004B | [ 005B | k 006B | { 007B | « 00AB | » 00BB | Ë 00CB | Û 00DB | ë 00EB | û 00FB |
| , 002C | < 003C | L 004C | \ 005C | l 006C | \| 007C | ¬ 00AC | ¼ 00BC | Ì 00CC | Ü 00DC | ì 00EC | ü 00FC |
| − 002D | = 003D | M 004D | ] 005D | m 006D | } 007D | - 00AD | ½ 00BD | Í 00CD | Ý 00DD | í 00ED | ý 00FD |
| . 002E | > 003E | N 004E | ^ 005E | n 006E | ~ 007E | ® 00AE | ¾ 00BE | Î 00CE | Þ 00DE | î 00EE | þ 00FE |
| / 002F | ? 003F | O 004F | _ 005F | o 006F | 007F | ¯ 00AF | ¿ 00BF | Ï 00CF | ß 00DF | ï 00EF | ÿ 00FF |

# 3.2 Repräsentation von Texten

**ISO 8859-1 (8 Bit)**

- International Organization for Standardization (gegründet 1947)
- ISO Latin 1
  - 8 Bit Code
  - enthält viele Sonderzeichen für westeuropäische Sprachen
    (z. B. Umlaute (¨ a, ¨ o, ¨ u, . . . ))
  - enthält nicht alle gewünschten Zeichen
    (z. B. fehlen japanische und andere asiatische Schriftzeichen, . . . )

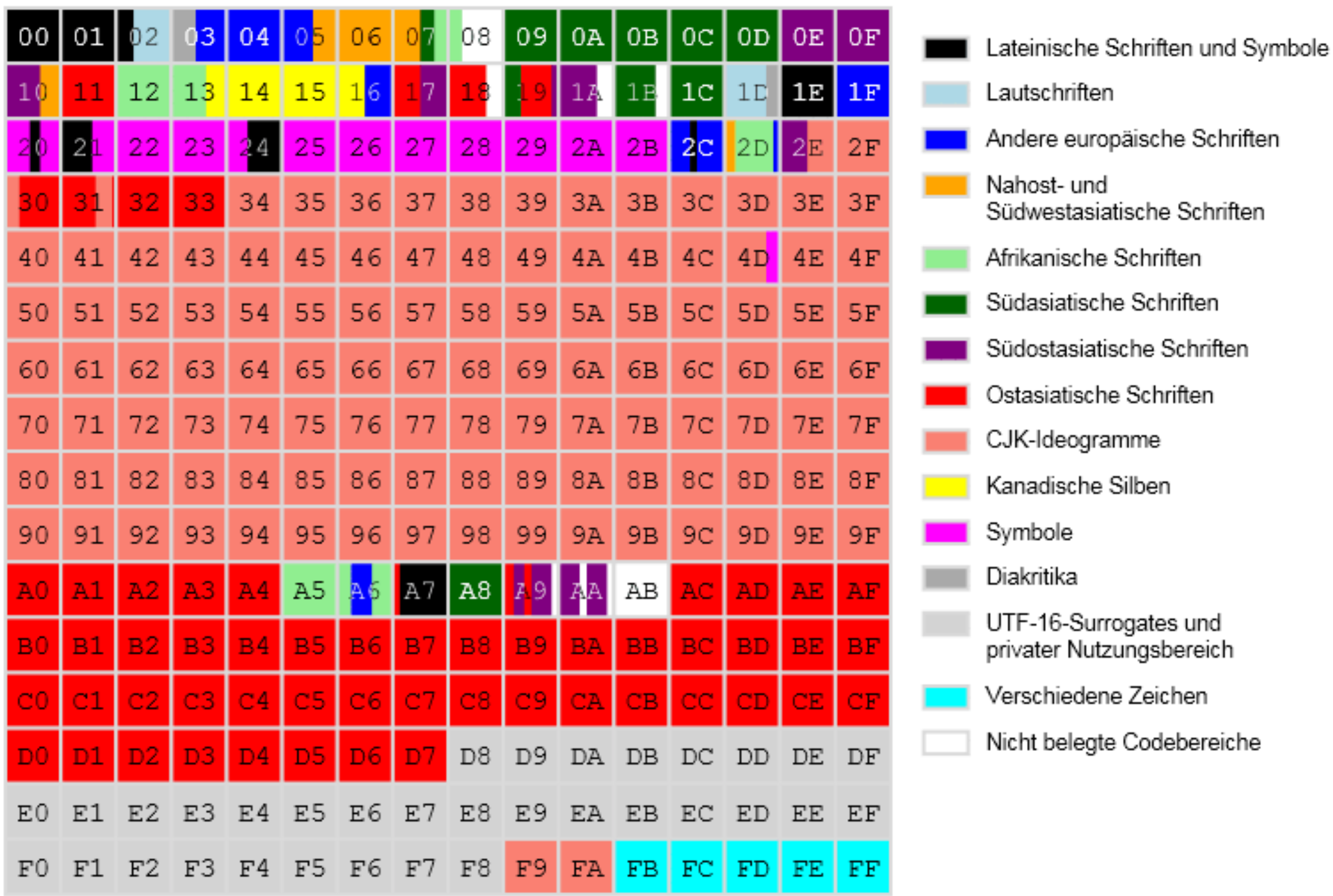
# 3.2 Repräsentation von Texten

## Unicode

- aktueller Standard Unicode 9.0 (Stand: 7. Oktober 2016)
- verwaltet vom Unicode-Konsortium (http://www.unicode.org)
- unterstützt verschiedene Codierungsformate (Unicode Transformation Format):
  - UTF-8,
  - UTF-16,
  - UTF-32
- längere Formate erweitern kürzere Formate
- vereinbart auch weitere Informationen
  - Schreibrichtung,
  - Kombination von Zeichen
  - …

# 3.2 Repräsentation von Texten

## Unicode



# 3.2 Repräsentation von Texten

## Unicode – Beispiel: Kanadische Silben

ᐃᓄᒃᑎᑐᑦ
Inuktitut Syllabarium

| ᖃᓂᐅᔮᖅᐸᐃᑦ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Anlaute | Silben | | | | Auslaute |
| | ai | i | u | a | |
| ø | ᐁ | ᐃ | ᐅ | ᐊ | |
| p | ᐯ | ᐱ | ᐳ | ᐸ | ᐊᑉ |
| t | ᑌ | ᑎ | ᑐ | ᑕ | ᐊᑦ |
| k | ᑫ | ᑭ | ᑯ | ᑲ | ᐊᒃ |
| g | ᒉ | ᒋ | ᒍ | ᒐ | ᐊᒡ |
| m | ᒣ | ᒥ | ᒧ | ᒪ | ᐊᒻ |
| n | ᓀ | ᓂ | ᓄ | ᓇ | ᐊᓐ |
| s | ᓭ | ᓯ | ᓱ | ᓴ | ᐊᔅ |
| l | ᓓ | ᓕ | ᓗ | ᓚ | ᐊᓪ |
| j | ᔦ | ᔨ | ᔪ | ᔭ | ᐊᔾ |
| v | ᕓ | ᕕ | ᕗ | ᕙ | ᐊᕝ |
| r | ᕃ | ᕆ | ᕈ | ᕋ | ᐊᕐ |
| q | ᙯ | ᕿ | ᖁ | ᖃ | ᐊᖅ |
| ng | ᙰ | ᖏ | ᖑ | ᖓ | ᐊᖕ |
| nng | □ | ᙱ | ᙳ | ᙵ | ᐊᖖ |
| □ | | ᖠ | ᖢ | ᖤ | ᐊᖦ |

# 3.2 Repräsentation von Texten

Zur Bedeutung der Repräsentation von Texten

**Programme**

- Ein Programm wird zunächst meist als Text (**Quelltext**) erzeugt und wie normaler Text repräsentiert.
- Übersetzungsprogramme (**Compiler**) erzeugen daraus Programmcode in Maschinen-sprache.
- In jeder Form müssen alle Anteile eines Programms durch **Bitfolgen** codiert werden.

```
public class HelloWorld {
    /**
     * @param args
     */
    public static void main(String[] args) {
        // TODO Auto-generated method stub
        System.out.println("Hallo Welt!");
    }
}
```

```
// Bytecode stream: 03 3b 84 00 01 1a 05 68 3b a7 ff f9
// Disassembly:
iconst_0        // 03
istore_0        // 3b
iinc 0, 1       // 84 00 01
iload_0         // 1a
iconst_2        // 05
imul            // 68
istore_0        // 3b
goto -7         // a7 ff f9
```

```
:10000000758 12F12019912025212025890004D125E
:100010000027B90005B120285750200744D12022D66
:100020001200691203271200E304F9D8FED9FC7408
:100030000E12022DE59012037A20B30405028002 0D
:10004000150285 02A030B2D37502FF80CE449501C
:1000500038205031286865 78293A0041445577 6541
```

# 3. Repräsentation von Daten

## 3. Repräsentation von Daten

1. Repräsentation von natürlichen Zahlen ✓
2. Repräsentation von Texten ✓
3. **Repräsentation ganzer Zahlen**
4. Repräsentation rationaler Zahlen
5. Repräsentation anderer Daten

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

**Wunsch**

ganze Zahlen $z \in Z$ repräsentieren zu können

**Vereinbarung**

feste Repräsentationslänge $\ell$

**Wie viele verschiedene Zahlen kann man so höchstens repräsentieren?**

- $\ell$ Positionen, jeweils 2 Möglichkeiten pro Position
- → $2^{\ell}$ verschiedene Bitmuster der Länge $\ell$

**Fragen**

- Wie können wir Zahlenbereich verwenden?
- Wie können wir positive und negative Zahlen unterscheiden?

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Vorzeichenbetragsmethode

### Vereinbarungen

- erstes Bit Vorzeichen
- restliche Bits Betragszahl in Binärdarstellung
- Vorzeichenbit $s = 1 \Leftrightarrow$ Vorzeichen negativ, da Zahl $= (-1)^s \cdot$Betragszahl gilt

### Es gilt

- kleinste darstellbare Zahl $-(2^{\ell-1} - 1)$
- größte darstellbare Zahl $2^{\ell-1} - 1$

### Eigenschaften

- + symmetrisch
- + Vorzeichenwechsel einfach
- − 0 nicht eindeutig
- − Vergleich von Zahlen schwierig
- − Verschwendung eines Codes

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Darstellung mit Bias (Exzessdarstellung)

### Vereinbarungen

- feste Verschiebung b (**Bias**).
- z wird als z + b als Binärzahl dargestellt
- übliche Werte für Bias $b = 2^{\ell-1}$ oder $b = 2^{\ell-1}-1$
- Beispiel $\ell=5$ → b=16 oder b=15

### Es gilt

- kleinste darstellbare Zahl $-b$
- größte darstellbare Zahl $2^{\ell} - 1 - b$

### Eigenschaften

- + 0 eindeutig & alle Codes ausgenutzt
- + Vergleich von Zahlen einfach
- + bei üblichem Bias erstes Bit vorzeichenbitanalog
- − nicht symmetrisch
- − Vorzeichenwechsel schwierig

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Einerkomplementdarstellung

### Vereinbarungen

- nicht-negative Zahlen: **Binärdarstellung**
- negative Zahlen **Komplement der Binärdarstellung**

### Es gilt

- kleinste darstellbare Zahl $-(2^{\ell-1}-1)$
- größte darstellbare Zahl $2^{\ell-1}-1$

### Eigenschaften

- + symmetrisch
- + erstes Bit wie Vorzeichenbit
- – 0 nicht eindeutig
- – Verschwendung eines Codes
- – Vergleich von Zahlen schwierig

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Zweierkomplementdarstellung

**Vereinbarungen**

- nicht-negative Zahlen: **Binärdarstellung**
- negative Zahlen **Komplement der Binärdarstellung + 1**

**Es gilt**

- kleinste darstellbare Zahl $-(2^{\ell-1})$
- größte darstellbare Zahl $2^{\ell-1} - 1$

**Eigenschaften**

- 0 eindeutig repräsentiert & alle Codes ausgenutzt
- \+ erstes Bit wie Vorzeichenbit
- \- Vergleich von Zahlen schwierig

Zweierkomplementdarstellung ist der Standard

## Geschlossene Form zur Berechnung des Zweierkomplements

**Theorem**

*Ein Bitvektor $a = (a_{n-1}, \ldots, a_0)$ repräsentiert bei einer Kodierung im Zweierkomplement die Zahl*

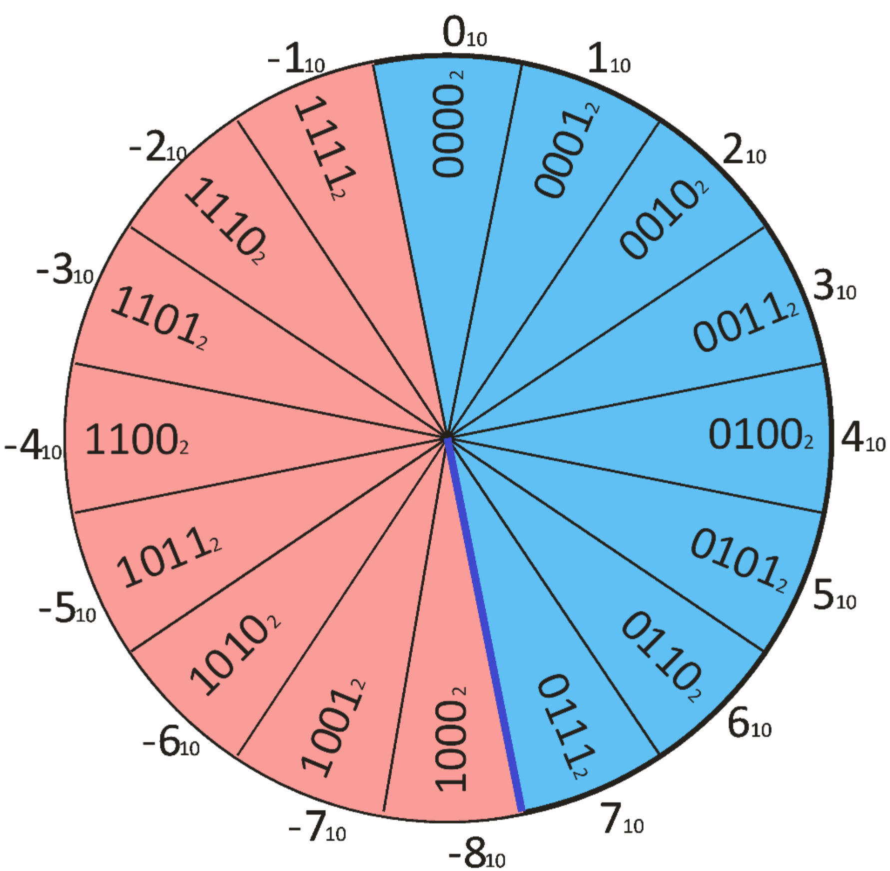
$$int(a) = -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot 2^i$$

**Beispiel**

$int(1101_{2K}) = -1 \cdot 2^3 + ( 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 ) = -8_{10} + 5_{10} = -3_{10}$

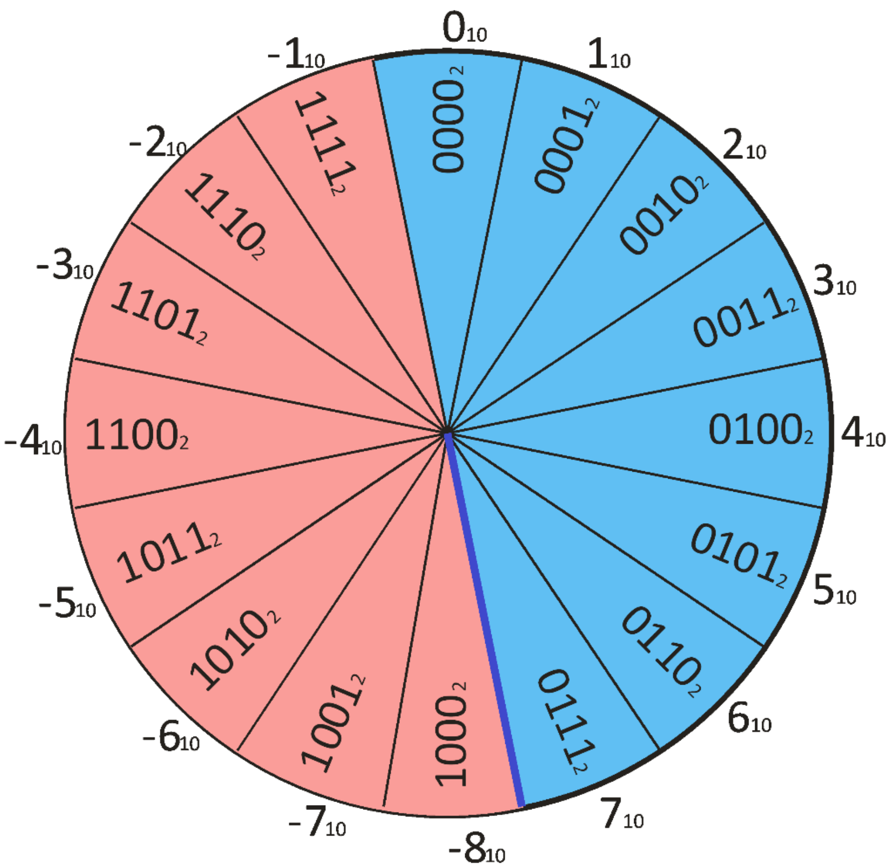
# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

**Für die Darstellung im Zweierkomplement ergibt sich folgendes Zahlenrad**



# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

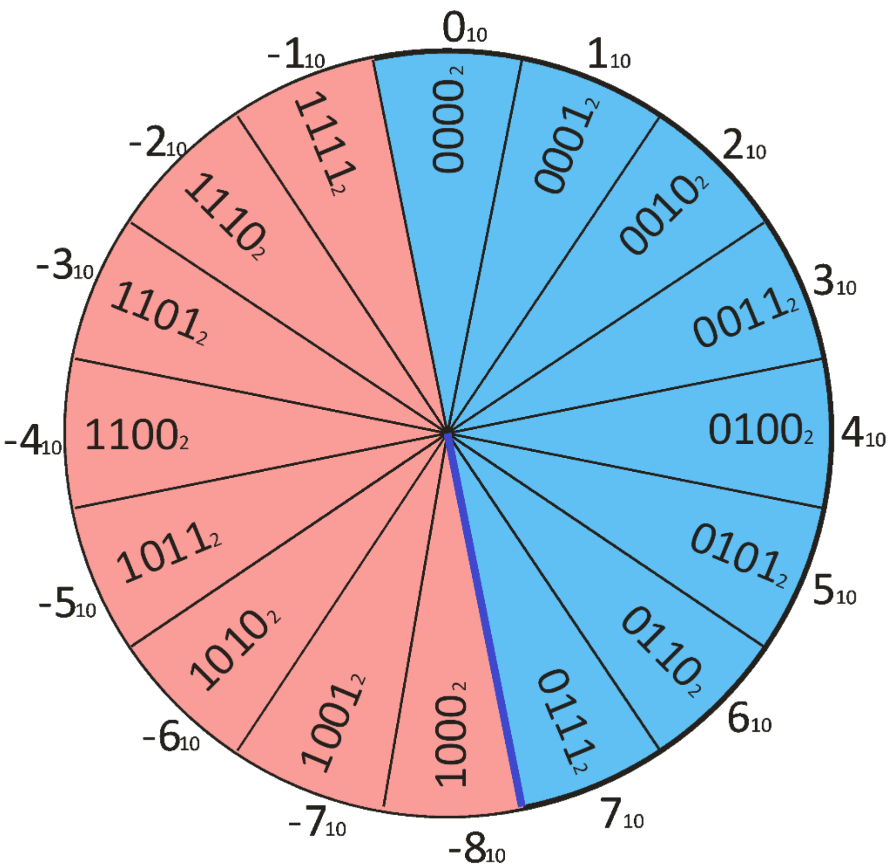
## Keine Fallunterscheidung bei Addition und Subtraktion




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | **0** | **1** | **0** | **1** |
| + 2 | **0** | **0** | **1** | **0** |
| 7 | **0** | **1** | **1** | **1** |

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

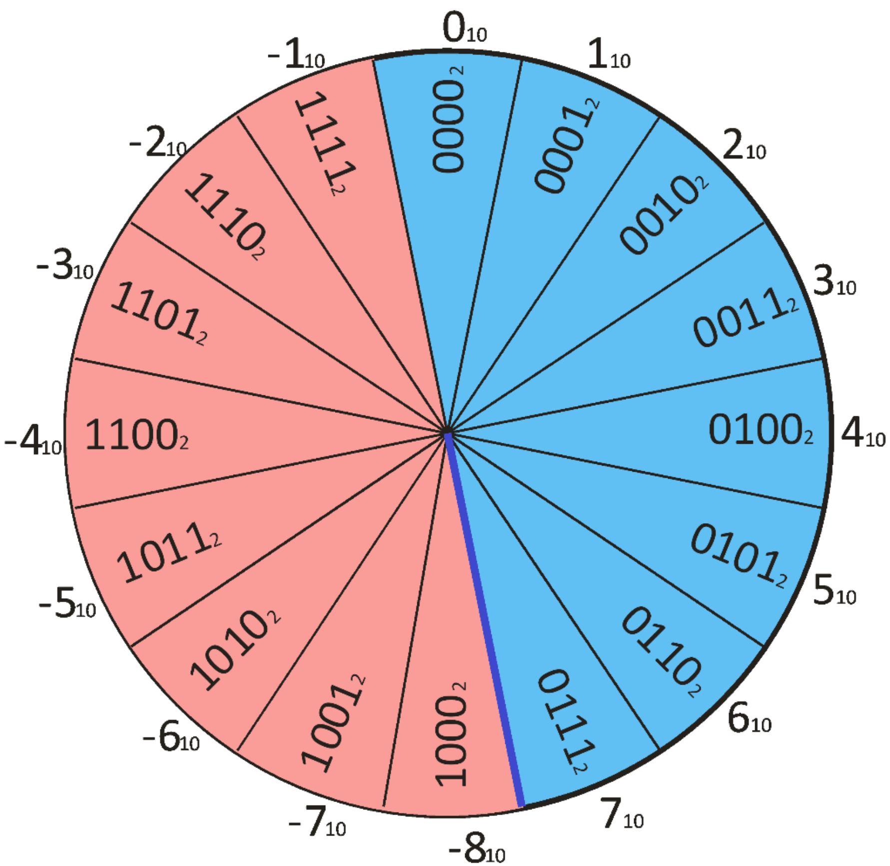
## Keine Fallunterscheidung bei Addition und Subtraktion




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -5 | | **1** | **0** | **1** | **1** |
| + -2 | | **1** | **1** | **1** | **0** |
| -7 | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** |

Übertragbit ignorieren

## Keine Fallunterscheidung bei Addition und Subtraktion

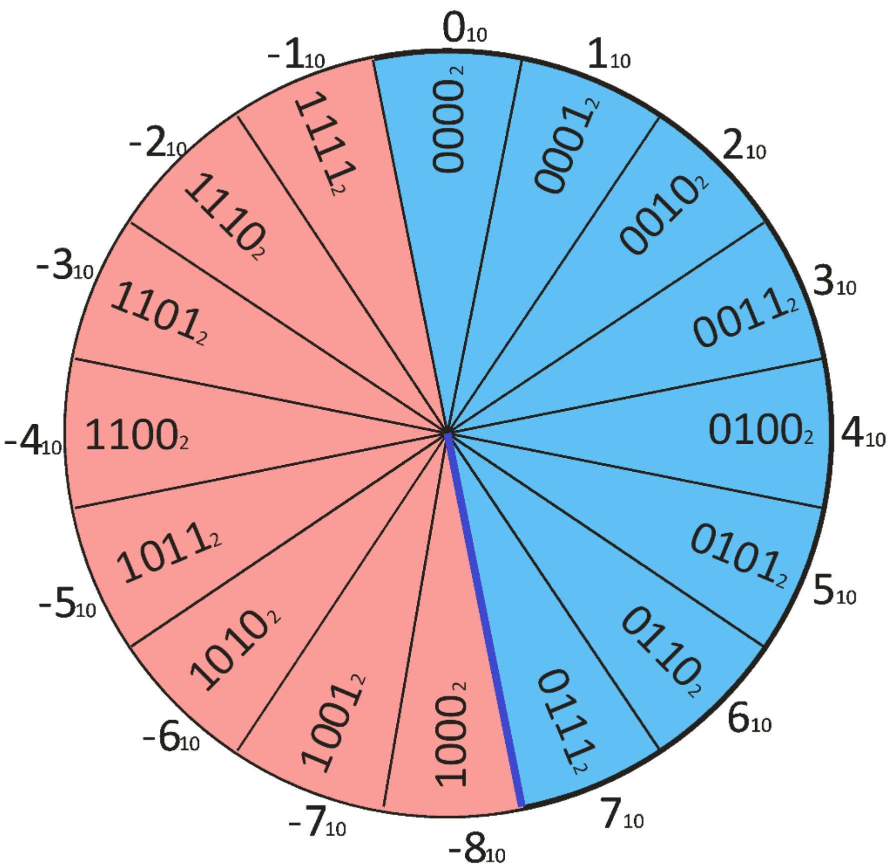



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | **0** | **1** | **0** | **1** |
| + -2 | | **1** | **1** | **1** | **0** |
| 3 | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** |

Übertragbit ignorieren

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Keine Fallunterscheidung bei Addition und Subtraktion

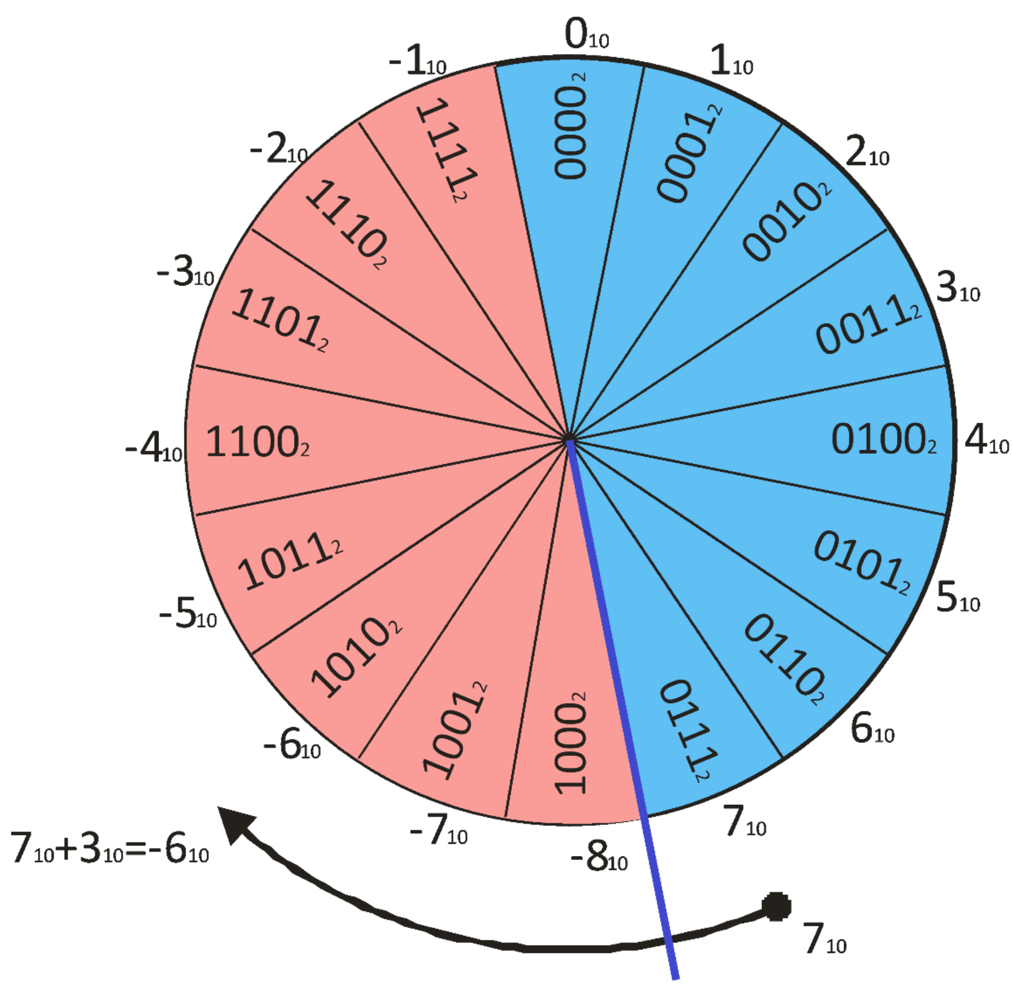



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -5 | | **1** | **0** | **1** | **1** |
| + 3 | | **0** | **0** | **1** | **1** |
| -2 | **0** | **1** | **1** | **1** | **0** |

Übertragbit ignorieren

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Aber: Vorsicht bei Bereichsüberschreitung




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | **0** | **1** | **1** | **1** |
| + 3 | | **0** | **0** | **1** | **1** |
| -6 | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |

Übertragbit ignorieren

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Alles verstanden?

Wir haben

- $\ell = 5$
- Bias $b = 2^{\ell-1} = 2^4 = 16$
- $z = 10010$

Welche Zahl wird denn nun repräsentiert?

**Vorzeichenbetragsdarstellung**

| 1 | $0010_2$ |
|---|---|
| Vorzeichenbit | Binärdarstellung |
| $-1^1$ | $0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$ |

**→ $10010_2 = -1 \cdot 2 = -2$**

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

**Alles verstanden?**

Wir haben

- $\ell = 5$
- Bias $b = 2^{\ell-1} = 2^4 = 16$
- $z = 10010$

Welche Zahl wird denn nun repräsentiert?

**Darstellung mit Bias b = 16 (Exzessdarstellung)**

$$
\begin{aligned}
10010_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 - b \\
&= 16 + 2 - b \\
&= 18 - 16 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

**→ $10010_2 = 2$**

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

**Alles verstanden?**

Wir haben

- $\ell = 5$
- Bias $b = 2^{\ell-1} = 2^4 = 16$
- $z = 10010$

Welche Zahl wird denn nun repräsentiert?

**Einerkomplementdarstellung**

- Führendes Bit 1 → negative Zahl
- Komplement von $10010_2 = 01101_2$
- $01101_2 = 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

  $= 8 + 4 + 1 = 13$

→ **$10010_2 = -13$**

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

**Alles verstanden?**

Wir haben

- $\ell = 5$
- Bias $b = 2^{\ell-1} = 2^4 = 16$
- $z = 10010$

Welche Zahl wird denn nun repräsentiert?

**Zweierkomplementdarstellung**

- Führendes Bit 1 → negative Zahl
- Zweierkomplement: $10010_2 - 1_2 = 10001_2$
- Komplement von $10001_2 = 01110_2$
- $01110_2 = 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 14$

→ **$10010_2$ = -14**

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Alles verstanden?

Wir haben

- $\ell = 5$
- Bias $b = 2^{\ell-1} = 2^4 = 16$
- $z = 10010$

Welche Zahl wird denn nun repräsentiert?

- -2 Vorzeichenbetragsdarstellung
- 2 Darstellung mit Bias b = 16 (Exzessdarstellung)
- -13 Einerkomplementdarstellung
- -14 Zweierkomplementdarstellung

**Und richtig sind ohne weitere Informationen über den Datentyp alle 4!**

# 3.3 Repräsentation ganzer Zahlen

## Beispielsammlung Darstellungen

Wir haben feste Länge $\ell = 5$

| z | VZ-Betrag | Bias b=16 | Bias b=15 | 1er-K. | 2er-K. |
|---|---|---|---|---|---|
| -16 | - | 00000 | - | - | 10000 |
| -15 | 11111 | 00001 | 00000 | 10000 | 10001 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| -1 | 10001 | 01111 | 01110 | 11110 | 11111 |
| 0 | 00000<br>10000 | 10000 | 01111 | 00000<br>11111 | 00000 |
| 1 | 00001 | 10001 | 10000 | 00001 | 00001 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 15 | 01111 | 11111 | 11110 | 01111 | 01111 |
| 16 | - | - | 11111 | - | - |

## 3. Repräsentation von Daten

1. Repräsentation von natürlichen Zahlen ✓
2. Repräsentation von Texten ✓
3. Repräsentation ganzer Zahlen ✓
4. **Repräsentation rationaler Zahlen**
5. Repräsentation anderer Daten

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

**Wunsch**

rationale Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ repräsentieren können

**Vereinbarung**

- feste Repräsentationslänge $\ell$ Bits
- feste Position des Kommas
- **Festkommadarstellung**

**Beispiele für $\ell = 8$ bei 3 Nachkommastellen**

- 10,34 → 00 010,340
- 93 847,123 → 93 847,123
- 0 → 00 000,000
- 123 456,78 nicht darstellbar (zu viele Stellen vor dem Komma)
- 12,345678 nicht darstellbar (aber runden denkbar)

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

**Beobachtung**

- Basis 10 im Bereich der digitalen Rechner nur bedingt brauchbar
- Idee ist aber übertragbar auf Basis 2

**Beispiel:** 93 847,123

| $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 000 | 1 000 | 100 | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 |
| 9 | 3 | 8 | 4 | 7 | 1 | 2 | 3 |

**Übertragung auf Basis 2: $(10110,101)_2$**

| $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | $2^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | 1/2 =0,5 | 1/4 = 0,25 | 1/8 = 0,125 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**= 16 + 4 + 2 + 0,5 + 0,125 = 22,625**

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

**Allgemein gilt**

- bei *v* **Vorkommastellen**
- und *m* **Nachkommastellen**

$$a = \sum_{i=-m}^{v-1} z_i \cdot 2^i$$

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

**Beobachtung**

- nicht alle Zahlen sind darstellbar
  - z. B.: 0,2
  - z. B.: pi
- ist das schlimm?
  - im Dezimalsystem ist 1/3 nicht darstellbar
  - pi hat unendlich viele Stellen, ist generell nicht darstellbar
- Festkommadarstellung hat **Vorteile**
  - bildet Rechenoperationen auf Ganzzahloperationen ab
  - keine Fließkommahardware nötig
  - schnelle Ausführung
  - Einsatz im Bereich der digitalen Signalverarbeitung
- **Nachteile**
  - feste Position des Kommas
  - unflexibel

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

## Andere Idee

# 2019

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

## Gleitkommazahlen

- Vorzeichenbit $s \in \{0,1\}$
- Mantisse $m \in \mathbb{Q}$
- Exponent $e \in Z$ (bestimmt die Position des Kommas)

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 10^e$$

## Normalisierte Gleitkommazahl

- $1 \leq m < 10$
- Beispiel: $2{,}019 \cdot 10^3$

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

**Übertragung auf Basis b=2**

- Vorzeichenbit $s \in \{0,1\}$
- Mantisse $m \in \mathrm{Q}$
- Exponent $e \in Z$ (bestimmt die Position des Kommas)

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e$$

**Normalisierte Gleitkommazahl**

- $1 \leq m < 2$

**Beobachtung**

- erste Ziffer der Mantisse ist **immer** 1
- 0 ist so nicht darstellbar

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

**IEEE-754 1985**

- Vorzeichenbit $s \in \{0,1\}$
- Mantisse $m \in \mathrm{Q}$
- Exponent $e \in Z$
- $1 \leq m < 2$

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e$$

**Festlegung**

- führende 1 der Mantisse wird nicht mit abgespeichert: **Implizite Eins**
- Mantisse in Binärcodierung als *Festkommazahlen* mit Ziffern **ausschließlich hinter dem Komma**
- Exponent in Exzessdarstellung mit Bias $b = 2^{\ell e - 1} - 1$

c.f. (Klass **Formatter** von Java oder **printf** von C)

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

## IEEE-754 1985

### Definierte Varianten

| Typ | Größe (1+r+p) | Exponent (r) | Mantisse (p) | Werte des Exponenten (e) | Biaswert (b) |
|---|---|---|---|---|---|
| single | 32 bit | 8 bit | 23 bit | -126 ≤ e ≤ 127 | 127 |
| double | 64 bit | 11 bit | 52 bit | -1022 ≤ e ≤ 1023 | 1023 |

### Besonderheiten beim Exponenten

Verkleinerung des zulässigen Bereichs um 1 auf beiden Seiten auf

- $e_{min} = -b + 1 = -(2^{\ell e - 1} - 1) + 1$,
- $e_{max} = 2^{\ell e} - 1 - b - 1 = 2^{\ell e - 1} - 1$

dient der Codierung **besonderer Zahlen**

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

## IEEE-754 1985

### Besondere Zahlen

| Vorzeichen | Exponent | Mantisse | Zahl |
|---|---|---|---|
| 0 | $e_{max} + 1$ | 0 | $+\infty$ |
| 1 | $e_{max} + 1$ | 0 | $-\infty$ |
| s | $e_{max} + 1$ | $\neq 0$ | NaN |
| 0 | $e_{min} - 1$ | 0 | 0 |
| 1 | $e_{min} - 1$ | 0 | -0 |
| s | $e_{min} - 1$ | $\neq 0$ | c.f. denormalisierte Darstellung |

NaN: Not a Number

letzte Zeile: denormalisierte Darstellung

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

## IEEE-754 1985

**Beispiel 1 (Typ: single)**

- $\ell = 32$, $\ell_s = 1$, $\ell_e = 8$, $\ell_m = 23$
- $b = 2^7 - 1 = 127 \rightarrow e_{min} = -b + 1 = -126$, $e_{max} = 2^8 - b - 2 = 127$

Wir wollen −3 darstellen:

- **negativ**, also **Vorzeichenbit** s=1
- **Darstellung als Summe von Zweierpotenzen**
  $3 = 2 + 1 = 2^1 + 2^0 = (2^0 + 2^{-1}) \cdot 2^1$
- **Mantisse** $(11000...)_2$, **implizite Eins** entfällt, also 100 0000 0000 · · ·
- **Exponent** 1 **Exzessdarstellung** 1 + b = 128 darstellen
- $128 = (1000\ 0000)_2$

| Vorzeichenbit | Exponent | Mantisse |
|---|---|---|
| 1 | 1000 0000 | 100 0000 0000 0000 0000 0000 |

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

## IEEE-754 1985

### Beispiel 2 (Typ: single)

- $\ell = 32$, $\ell_s = 1$, $\ell_e = 8$, $\ell_m = 23$
- $b = 2^7 - 1 = 127 \rightarrow e_{min} = -b + 1 = -126$, $e_{max} = 2^8 - b - 2 = 127$

Wir wollen 0,0546875 darstellen:

- **positiv**, also **Vorzeichenbit** s=0
- **Darstellung als Summe von Zweierpotenzen**
  $0{,}0546875 = 1/32 + 1/64 + 1/128 = 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} = (2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}) \cdot 2^{-5}$
- **Mantisse** $(11100...)_2$, **implizite Eins** entfällt, also 110 0000 0000 · · ·
- **Exponent** -5 **Exzessdarstellung** -5 + b = 122 darstellen
- $122 = (0111\ 1010)_2$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0111 1010 | 110 0000 0000 0000 0000 0000 |
| Vorzeichenbit | Exponent | Mantisse |

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

## IEEE-754 1985

### Beispiel 3 (Typ: single)

- $\ell = 32$, $\ell_s = 1$, $\ell_e = 8$, $\ell_m = 23$
- $b = 2^7 - 1 = 127 \rightarrow e_{min} = -b + 1 = -126$, $e_{max} = 2^8 - b - 2 = 127$

Gegeben sei 0 1011 0001 010 1001 0000 0000 0000 0000:

| 0 | 1011 0001 | 010 1001 0000 0000 0000 0000 |
|---|---|---|
| Vorzeichenbit | Exponent | Mantisse |

- **Vorzeichenbit** s=0, also **positiv**
- **Exponent** $(1011\ 0001)_2 = 177$
- **Exzessdarstellung** $177 - b = 177 - 127 = 50$
- **Mantisse** $(010\ 1001\ \ldots)_2$, zuzüglich **impliziter Eins** $(1{,}010\ 1001\ \ldots)_2$
- $(2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-7}) \cdot 2^{50} = 2^{50} + 2^{48} + 2^{46} + 2^{43} = 1\,486\,539\,720\,753\,152$

# 3.4 Repräsentation rationaler Zahlen

**IEEE-754 1985**

$$(-1)^s \cdot \left( \sum_{i=1}^{l_m} m_i \cdot 2^{-i} \right) \cdot 2^{e_{min}}$$

**Denormalisierte Darstellung**

- gilt, wenn Exponent = $e_{min} - 1$
- und Mantisse $\neq 0$
- erlaub es, noch kleinere Zahlen darzustellen

**Beispiel**

- `If x ≠ y Then z := 1/(x – y)`
- x = 0 0000 0001 **(1)** 000 0000 0000 0000 0000 0001 $2^{-126} + 2^{-149}$
- y = 0 0000 0001 **(1)** 000 0000 0000 0000 0000 0000 $2^{-126}$

klar x $\neq$ y, aber ohne denormalisierte Darstellung ist x – y = 0 gerundet

- denormalisiert x – y = $2^{-149}$
- x – y = $2^{-149}$ = 0 0000 0000 000 0000 0000 0000 0000 0001

- auf jeden Fall besserer Programmierstil
  `If x – y ≠ 0 Then z := 1/(x – y)`

# 3.4 rationaler Zahlen: Real-world numerical catastrophes

- *Ariane 5 rocket.* Ariane 5 rocket exploded 40 seconds after being launched by European Space Agency on June 4th, 1996. (http://www.youtube.com/watch?v=gp_D8r-2hwk) Maiden voyage after a decade and 7 billion dollars of research and development. Sensor reported acceleration that was so large that it caused an overflow in the part of the program responsible for recalibrating inertial guidance. 64-bit floating point number was converted to a 16-bit signed integer, and the conversion failed. This resulted in a drastic attempt to correct the nonexistent problem, which separated the motors from their mountings, leading to the end of Ariane 5.

- *Patriot missile accident.* On February 25, 1991 an American Patriot missile failed to track and destroy an Iraqi Scud missile. Instead it hit an Army barracks, killing 26 people. The cause was later determined to be an inaccurate calculate caused by measuring time in tenth of a second. Couldn't represent 1/10 exactly since used 24 bit floating point

Source: http://introcs.cs.princeton.edu/java/91float/

# 3. Repräsentation von Daten

## 3. Repräsentation von Daten

1. Repräsentation von natürlichen Zahlen ✓
2. Repräsentation von Texten ✓
3. Repräsentation ganzer Zahlen ✓
4. Repräsentation rationaler Zahlen ✓
5. **Repräsentation anderer Daten**

# 3.5 Repräsentation anderer Daten

**Was sind andere Daten?**

- Bilder, Audiodaten, Videodaten
- Objekte, Felder
- für uns interessant: primitive Daten
  Datentypen, die direkt von der Hardware unterstützt werden

**Programme**

- Bitmuster fester Länge (z. B.: 32 Bit, 64 Bit)
  - Befehl
  - Operanden

**Problem: Was repräsentiert ein Byte im Speicher?**

- Typbits höchstens für große Bereiche (Programm, Daten)
- Bei Daten sorgt der Compiler für richtige Interpretation
- Typisierung wichtig!

# 3.5 Repräsentation anderer Daten

## Repräsentation von Datenfolgen

Speicher oft in **Worten** organisiert

- Wort ja nach Rechner 2 Bytes, 4 Bytes, . . .

## Heterogene Daten

- werden hintereinander in den Speicher geschrieben
- dabei manchmal Wortgrenzen beachten
- dann leere Zellen (Bytes) möglich

## Homogene Daten

- Arrays
- Problem Wie erkennt man das Ende der Folge?
  - feste Anzahl vereinbaren
  - Länge am Anfang speichern
  - spezielles Endezeichen verwenden

# 3. Repräsentation von Daten

## 3. Repräsentation von Daten

1. Repräsentation von natürlichen Zahlen ✓
2. Repräsentation von Texten ✓
3. Repräsentation ganzer Zahlen ✓
4. Repräsentation rationaler Zahlen ✓
5. Repräsentation anderer Daten ✓