technische universität
dortmund

fakultät für informatik

Rechnerstrukturen, Teil 1

Vorlesung 4 SWS WS 19/20

Prof. Dr. Jian-Jia Chen
Fakultät für Informatik – Technische Universität Dortmund
jian-jia.chen@cs.uni-dortmund.de
http://ls12-www.cs.tu-dortmund.de

Übersicht

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Was bedeutet Optimierung?

- bestmögliche Lösung finden
- **Vorgehen**
  1. Lösungen finden
  2. beweisen, dass es keine bessere gibt

In RS sehen wir das nicht ganz so streng

- Wir wollen zu einem besseren Entwurf kommen
- nicht zwingend zum optimalen Entwurf,
  - da es häufig konkurrierende Ansätze gibt
  - die sich zum Teil auch widersprechen

→ Strukturierter Entwurf

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Strukturierter Schaltnetz-Entwurf

Schaltnetz-Entwurf bisher

- ad hoc
- Normalformen

Wunsch

- Systematisierung
- Strukturierung

Hoffnungen

- einfacher zu guten Entwürfen
- Schaltnetze verständlicher
- Schaltnetze besser verifizierbar

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Systematisierung Schaltnetz-Entwurf

Grundidee

- gute Schaltnetze als Komponenten wiederverwenden
- bereits angewendet:
  - bei allen Addierern HA verwendet
  - HA zur Bestimmung ob Übertrag generiert oder weitergegeben wird

Zum Einstieg: Kann man VA sinnvoll aus HA bauen?

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Noch einmal zum Volladdierer

Wir wollen Volladdierer aus Halbaddierern bauen (Wiederverwendung)

VA

"$Calt + x + y$"

$Calt$	x	y	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Noch einmal zum Volladdierer

Einsatz eines Halbaddierers

- berechnet $x + y$

			VA "$Calt + x + y$"		HA "$x + y$"	
$Calt$	x	y	c	s	Ac	As
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Noch einmal zum Volladdierer

Einsatz eines Halbaddierers

- berechnet c und s ohne existierenden Übertrag korrekt
- berechnet c und s mit existierendem Übertrag fast immer falsch

			VA "$Calt + x + y$"		HA "$x + y$"	
$Calt$	x	y	c	s	Ac	As
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Noch einmal zum Volladdierer

Einsatz eines weiteren Halbaddierers

- berechnet $Calt + \mathrm{As}$

			VA "$Calt + \mathrm{x} + \mathrm{y}$"		HA "$\mathrm{x} + \mathrm{y}$"		HA "$Calt + \mathrm{As}$"	
$Calt$	x	y	c	s	Ac	As	Bc	Bs
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	1

Noch einmal zum Volladdierer

Einsatz eines weiteren Halbaddierers

- berechnet c und s ohne existierenden Übertrag fast korrekt
- berechnet c und s mit existierendem Übertrag fast korrekt

			VA "Calt + x + y"		HA "x + y"		HA "Calt + As"	
$Calt$	x	y	c	s	Ac	As	Bc	Bs
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	1

Noch einmal zum Volladdierer

Übertrag der Gesamtsumme entsteht, wenn mindestens einer der beiden Halbaddierer einen Übertrag erzeugt: Ac bzw. Bc

			VA "$Calt$ + x + y"		HA "x + y"		HA "$Calt$ + As"	
$Calt$	x	y	c	s	Ac	As	Bc	Bs
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	**1**	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	**1**	0
1	1	0	1	0	0	1	**1**	0
1	1	1	1	1	**1**	0	0	1

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Noch einmal zum Volladdierer

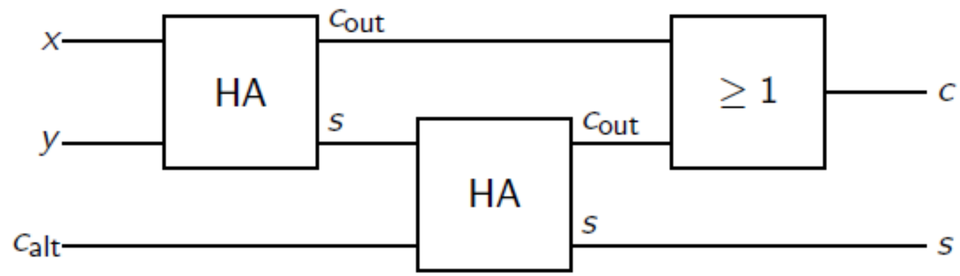
Fügen wir die Verknüpfung von Ac bzw. Bc als Disjunktion (mindestens einer der Überträge muss erzeugt worden sein) hinzu

			VA "$Calt + x + y$"		HA "$x + y$"		HA "$Calt + As$"		
$Calt$	x	y	c	s	Ac	As	Bc	Bs	$Ac \vee Bc$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

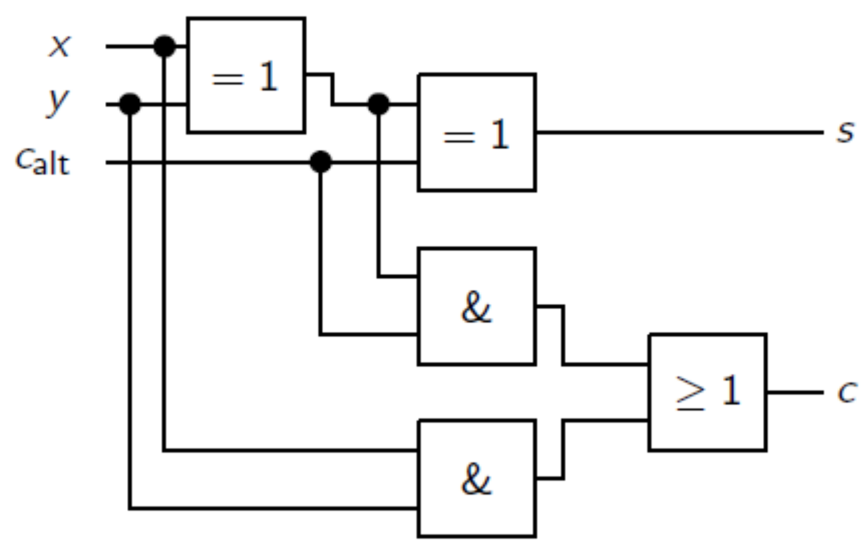
Noch einmal zum Volladdierer

			VA "$Calt + x + y$"		HA "$x + y$"		HA "$Calt + As$"		
$Calt$	x	y	c	s	Ac	As	Bc	Bs	$Ac \vee Bc$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Strukturierter Volladdierer

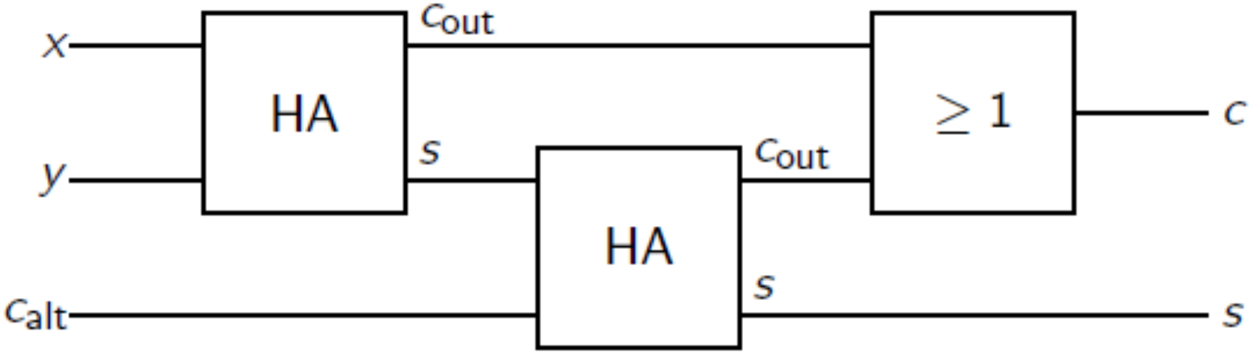


Ad-Hoc Volladdierer aus 5.2



6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Strukturierter Volladdierer



Eigenschaften

- Größe 5
- Tiefe 3
- Erinnerung **Halbaddierer**: Größe 2, Tiefe 1
- Erinnerung ”**alter**“ **Volladdierer**: Größe 5, Tiefe 3

→ immerhin nichts verloren im Vergleich zum sorgfältigen ”ad hoc-Entwurf“

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Strukturierter Multiplexer

Die Idee eines strukturierten Entwurfs eines Volladdierers

- wir haben Halbaddierer
- bauen wir daraus einen Volladdierer

übertragen wir nun auf die Multiplexer:

- wir haben einen MUX_d
- bauen wir daraus einen MUX_{2d}

Multiplexer

Erinnerung vereinfachte Wertetabelle

y_1	$\text{MUX}(y_1, x_0, x_1)$
0	x_0
1	x_1

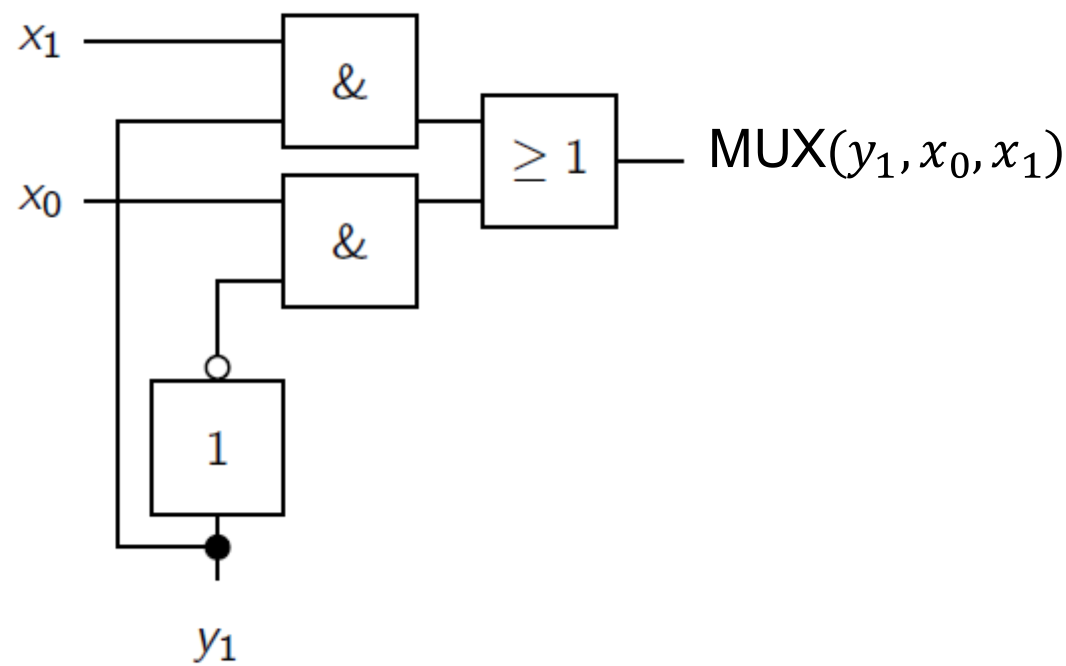
normale (ausführliche) Wertetabelle

y_1	x_1	x_0	$\text{MUX}(y_1, x_0, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Multiplexer

reduziertes Schaltnetz durch Anwendung der Resolution

y_1	x_1	x_0	$\text{MUX}(y_1, x_0, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Strukturiert zum Schaltnetz für MUX_2

y_1	y_2	$\text{MUX}(y_1, y_2, x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0	x_0
0	1	x_1
1	0	x_2
1	1	x_3

Beobachtung

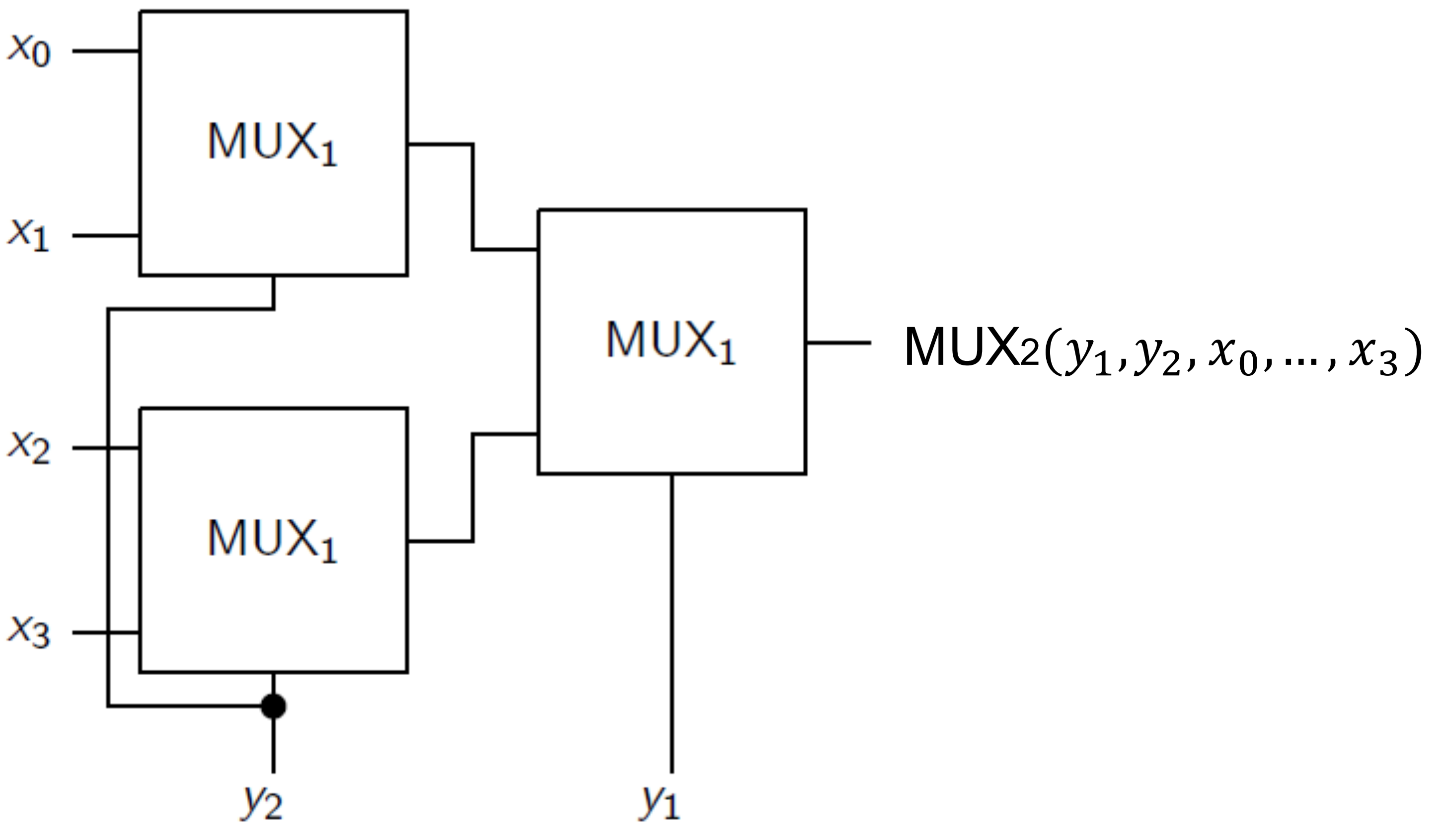
- $y_2 = 0 \Rightarrow \text{MUX}_2(y_1, y_2, x_0, x_1, x_2, x_3) \in \{x_0, x_2\}$
- $y_2 = 1 \Rightarrow \text{MUX}_2(y_1, y_2, x_0, x_1, x_2, x_3) \in \{x_1, x_3\}$

also ein MUX_1 wählt mittels y_2 aus $\{x_0, x_1\}$

ein MUX_1 wählt mittels y_2 aus $\{x_2, x_3\}$

ein MUX_1 wählt mittels y_1 aus den Ergebnissen

Strukturierter MUX_2



6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Strukturierter MUX_4

- wir haben einen MUX_d
- bauen wir daraus einen MUX_{2d}

y_1	y_2	y_3	y_4	$\text{MUX}(y_1, y_2, y_3, y_4, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{15})$
0	0	0	0	x_0
0	0	0	1	x_1
0	0	1	0	x_2
0	0	1	1	x_3
0	1	0	0	x_4
0	1	0	1	x_5
0	1	1	0	x_6
0	1	1	1	x_7
1	0	0	0	x_8
1	0	0	1	x_9
1	0	1	0	x_{10}
1	0	1	1	x_{11}
1	1	0	0	x_{12}
1	1	0	1	x_{13}
1	1	1	0	x_{14}
1	1	1	1	x_{15}

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Strukturiert MUX_4

- wir haben einen MUX_d
- bauen wir daraus einen MUX_{2d}

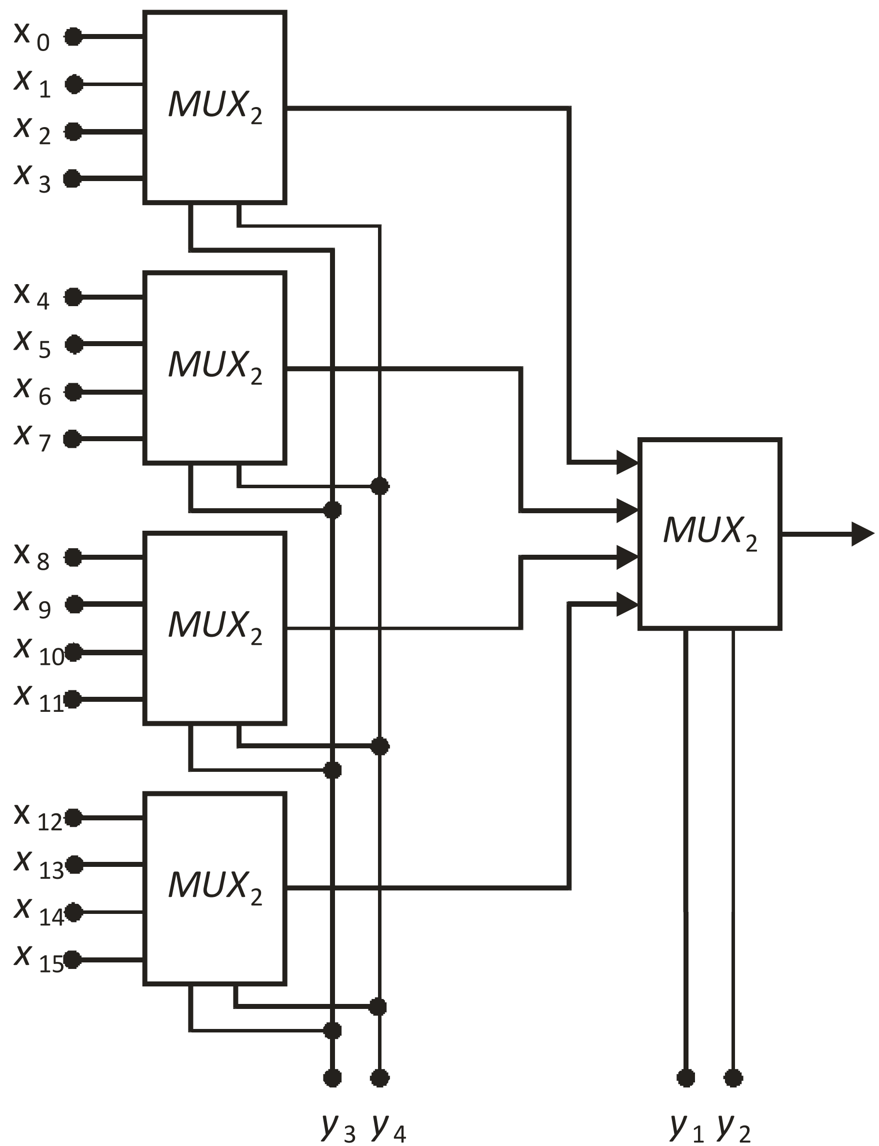
Beobachtung

- $(y_3, y_4) = (0,0) \Rightarrow \text{MUX}_4(\dots) \in \{x_0, x_4, x_8, x_{12}\}$
- $(y_3, y_4) = (0,1) \Rightarrow \text{MUX}_4(\dots) \in \{x_1, x_5, x_9, x_{13}\}$
- $(y_3, y_4) = (1,0) \Rightarrow \text{MUX}_4(\dots) \in \{x_2, x_6, x_{10}, x_{14}\}$
- $(y_3, y_4) = (1,1) \Rightarrow \text{MUX}_4(\dots) \in \{x_3, x_7, x_{11}, x_{15}\}$

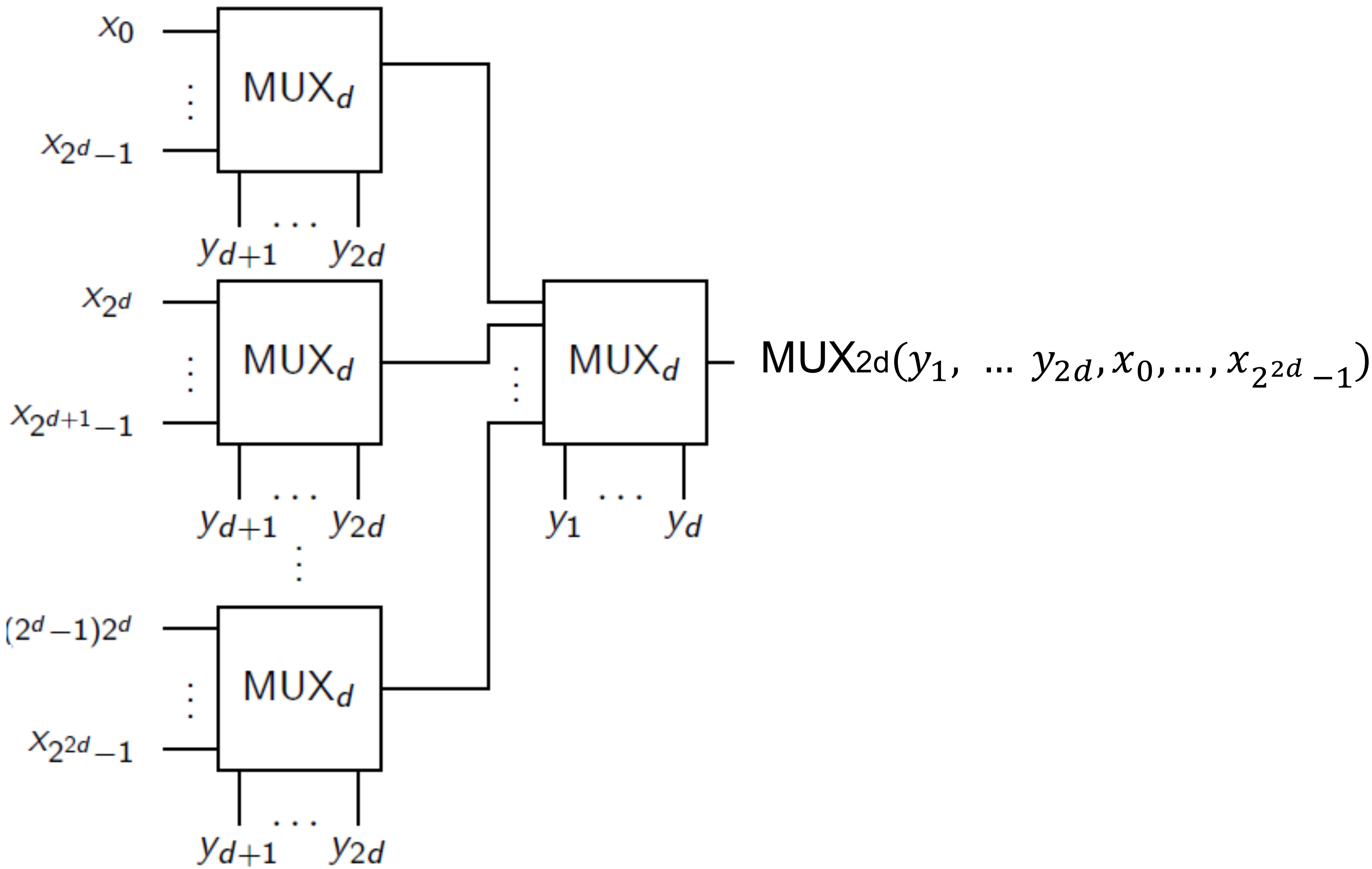
y_1	y_2	y_3	y_4	$\text{MUX}(y_1, y_2, y_3, y_4, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{15})$
0	0	0	0	x_0
0	0	0	1	x_1
0	0	1	0	x_2
0	0	1	1	x_3
0	1	0	0	x_4
0	1	0	1	x_5
0	1	1	0	x_6
0	1	1	1	x_7
1	0	0	0	x_8
1	0	0	1	x_9
1	0	1	0	x_{10}
1	0	1	1	x_{11}
1	1	0	0	x_{12}
1	1	0	1	x_{13}
1	1	1	0	x_{14}
1	1	1	1	x_{15}

Strukturiert MUX_4

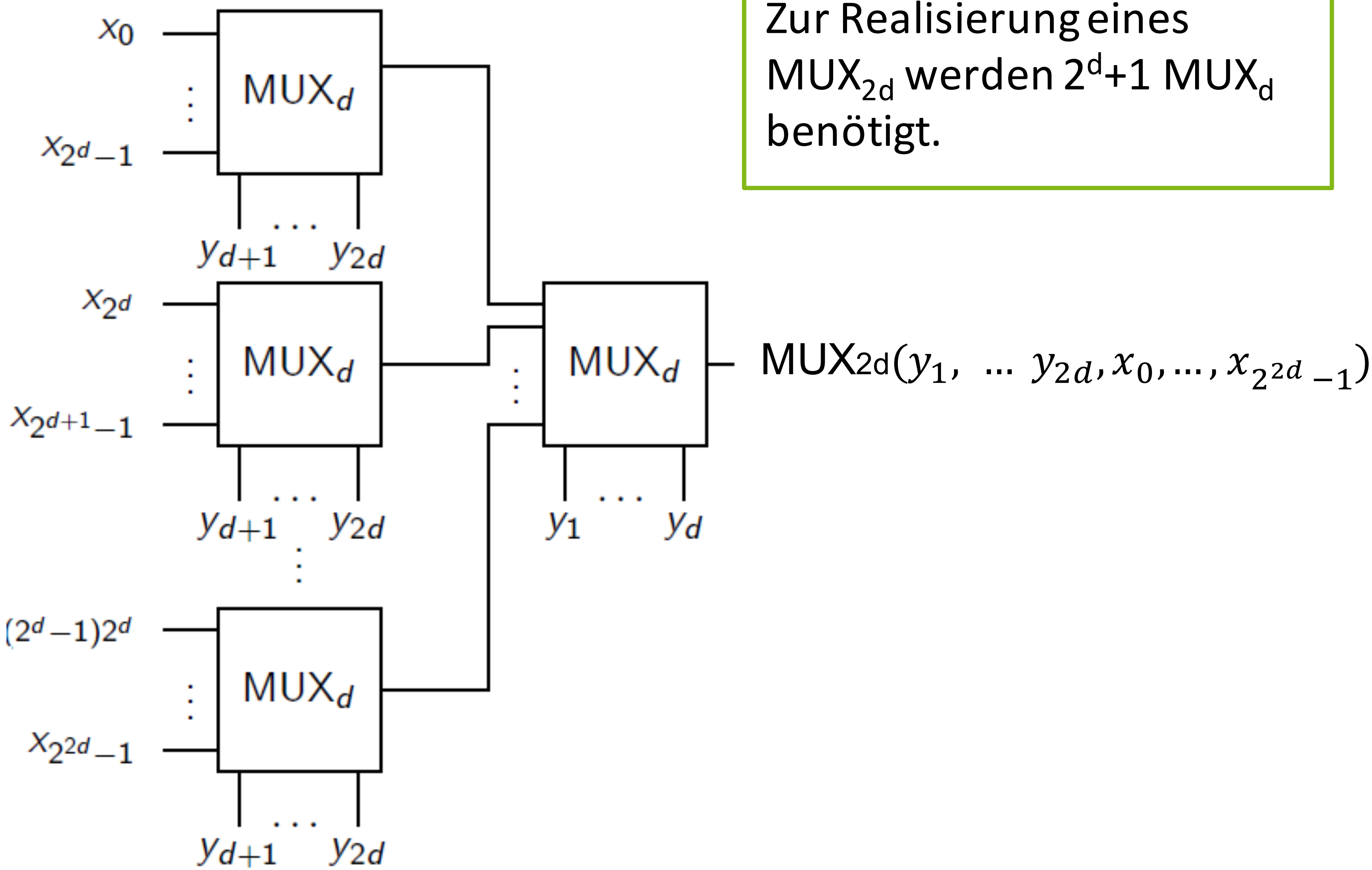
- 4 MUX_2
  wählen 4 Eingänge
  4 aus 16
- 1 MUX_2
  wählt Ergebnis
  1 aus 4



Strukturiert MUX_{2d}



Strukturiert MUX_{2d}



Zur Realisierung eines MUX_{2d} werden 2^d+1 MUX_d benötigt.

6.1 Einleitung & Strukturierter Entwurf

Strukturierter Entwurf

Vorteile des strukturierten Entwurfs

- bietet ein einfaches Grundprinzip
- auch komplexe Schaltnetze sind intuitiv korrekt
- bietet schnelle Vorgehensweise

Nachteile des strukturierten Entwurfs

- entstehende Schaltnetze sind groß
- bereits berechnete Werte werden in der Regel nicht wiederverwendet, da sie vom Konstruktionsprinzip nicht erkannt werden

6. Optimierung von Schaltnetzen

1. Einleitung & Strukturierter Entwurf ✓
2. **Algebraische Vereinfachung**
3. KV-Diagramme
4. Algorithmus von Quine/McCluskey
5. Unvollständig definierte Funktionen
6. Hazards

6.2 Algebraische Vereinfachung

Entwurf kleiner Schaltnetze

Erinnerung	Normalformen (DNF, RNF, KNF) direkt in Schaltnetz umsetzbar
Beobachtung	dabei jede Variable höchstens einmal negieren
ab jetzt	Wir zählen Negationsgatter nicht mehr. → für große Schaltnetze nicht wesentlich
dann	Schaltnetzgröße b $\triangleq$ Anzahl Minterme/Maxterme + 1
Verbesserung	äquivalenter kleinerer boolescher Ausdruck führt zu kleinerem Schaltnetz
Vorsicht	Kleinerer Ausdruck ist keine Normalform mehr!

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

Erinnerung: Rechengesetze für boolesche Algebra (Satz 3)

Beispiel: $f\,:\ \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor

(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

DNF dazu

einschlägige Indizes: 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11

Minterm zu i ist Funktion $m_i\ : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit

$$m_i\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)_2 = i$$

am Beispiel i = 2 $\quad m_2\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ \overline{x_4}$

denn $\quad \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ \overline{x_4} = 1$

$$\Leftrightarrow (x_1 = 0) \wedge (x_2 = 0) \wedge (x_3 = 1) \wedge (x_4 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)_2 = 2$$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

DNF dazu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \lor \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \\ \lor x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \lor x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \lor x_1 \overline{x_2} x_3 x_4$$

Größe (ohne Negationen) 8 + 1 = 9

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $x_i x_j \lor \overline{x}_i x_j = x_j$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

DNF dazu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4}$$
$$\vee\ x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\, x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4$$

Vereinfacht $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \ldots$

Größe (ohne Negationen) 7 + 1 = 8

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $x_i x_j \vee \overline{x}_i x_j = x_j$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f\ :\ \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

DNF dazu

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \lor \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$$
$$\lor\ x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \lor x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \lor x_1\overline{x_2}x_3x_4$$

Vereinfacht $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1}x_2\overline{x_4} \lor \ldots$

Größe (ohne Negationen) $\quad$ 6 + 1 = 7

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $\quad x_i x_j \lor \overline{x_i} x_j = x_j$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

DNF dazu

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$$
$$\vee\; x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4$$

Vereinfacht $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \ldots$

Größe (ohne Negationen) 5 + 1 = 6

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $x_i x_j \vee \overline{x_i} x_j = x_j$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

DNF dazu

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \lor \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$$
$$\lor\ x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \lor x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \lor x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \lor x_1\overline{x_2}x_3x_4$$

Vereinfacht $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1}x_2\overline{x_4} \lor x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \lor x_1\overline{x_2}x_3 \lor \ldots$

Größe (ohne Negationen) 4 + 1 = 5

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $x_ix_j \lor \overline{x_i}x_j = x_j$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

Vereinfacht

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2}\ \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$$

Größe (ohne Negationen) 4 + 1 = 5

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $x_i x_j \vee \overline{x}_i x_j = x_j$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

dazu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_4} \lor \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} \lor x_1 \overline{x_2}\ \overline{x_3} \lor x_1 \overline{x_2} x_3$$

Vereinfacht $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\ \overline{x_4} \lor \ldots$

Größe (ohne Negationen) 3 + 1 = 4

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $x_i x_j \lor \overline{x_i} x_j = x_j$

6.2 Algebraische Vereinfachung

Algebraische Vereinfachungen

$f:\ \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

dazu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \lor \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} \lor x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \lor x_1 \overline{x_2} x_3$$

Vereinfacht $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_4} \lor x_1 \overline{x_2}$

Größe (ohne Negationen) 2 + 1 = 3

Wie können wir das verkleinern?

Resolution $x_i x_j \lor \overline{x_i} x_j = x_j$

klar Größe 9 $\longrightarrow$ 3 beeindruckend aber recht schwierig

6. Optimierung von Schaltnetzen

6. Optimierung von Schaltnetzen

1. Einleitung & Strukturierter Entwurf ✓
2. Algebraische Vereinfachung ✓
3. **KV-Diagramme**
4. Algorithmus von Quine/McCluskey
5. Unvollständig definierte Funktionen
6. Hazards

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramme

entwickelt von

- Maurice Karnaugh (1953)
- Edward W. Veitch (1952)

KV-Diagramme

- sind systematischer, anschaulicher und
- bieten einen viel übersichtlicheren Weg, um Funktionen $f:\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ und $f:\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ zu vereinfachen

aber schon für $f:\{0,1\}^5 \rightarrow \{0,1\}$ unübersichtlich

$\Rightarrow$ darum vor allem im HaPra wichtig.

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramme

- Mittels eines KV-Diagramms lässt sich jede disjunktive Normalform in einen disjunktiven logischen Ausdruck umwandeln
- disjunktiver logischer Ausdruck ist minimal

Vorgehensweise

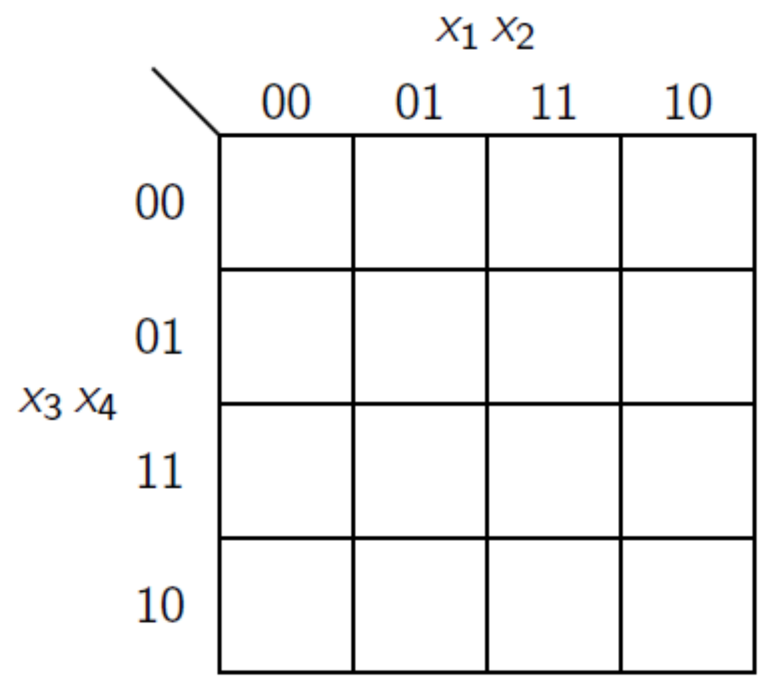
1. Erstellen einer Funktionstabelle
2. Ableitung der DNF
3. Umwandlung der DNF in ein KV-Diagramm
4. Auffinden von Strukturen, die zur minimalen Disjunktionen führen. Dieser Schritt basiert auf der Resolution

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

Besonderheit

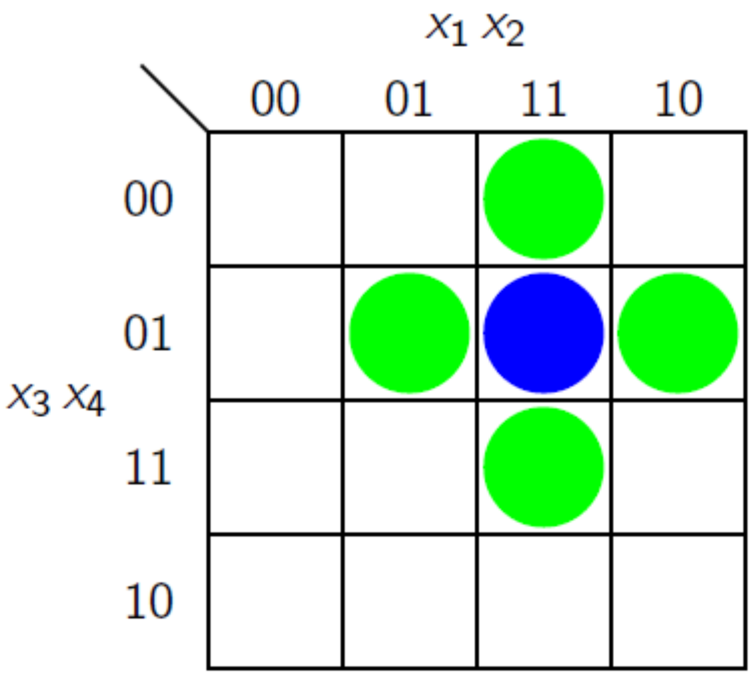
- Kanten sind mit Variablen beschriftet
- jede Variable verfügt über eine Zeile/Spalte für Variable und negierte Variable
- **Nachbarschaften**, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in **einer** Stelle



6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f:\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

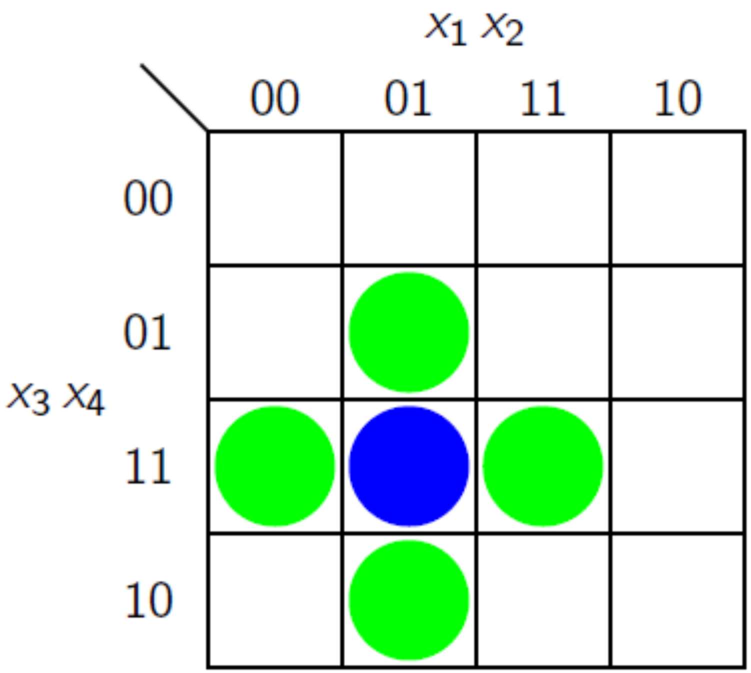
Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

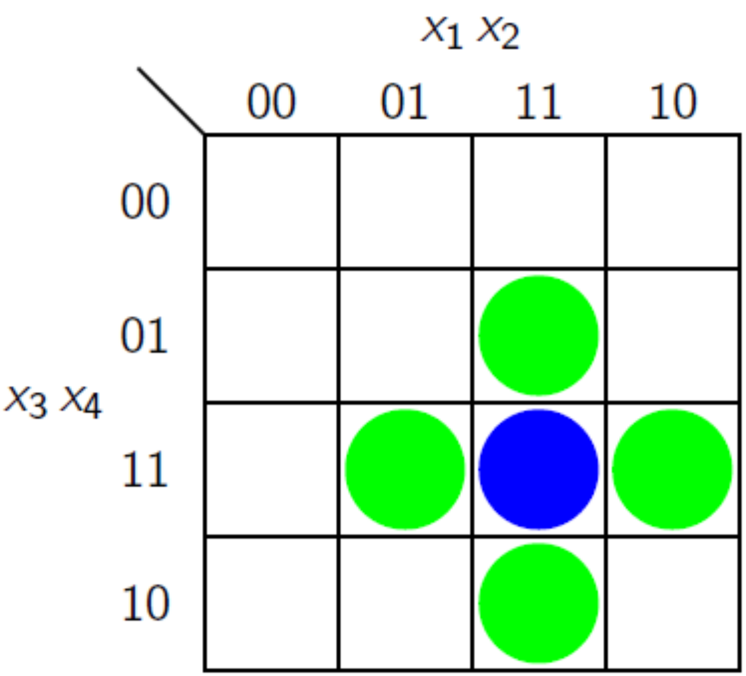
Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

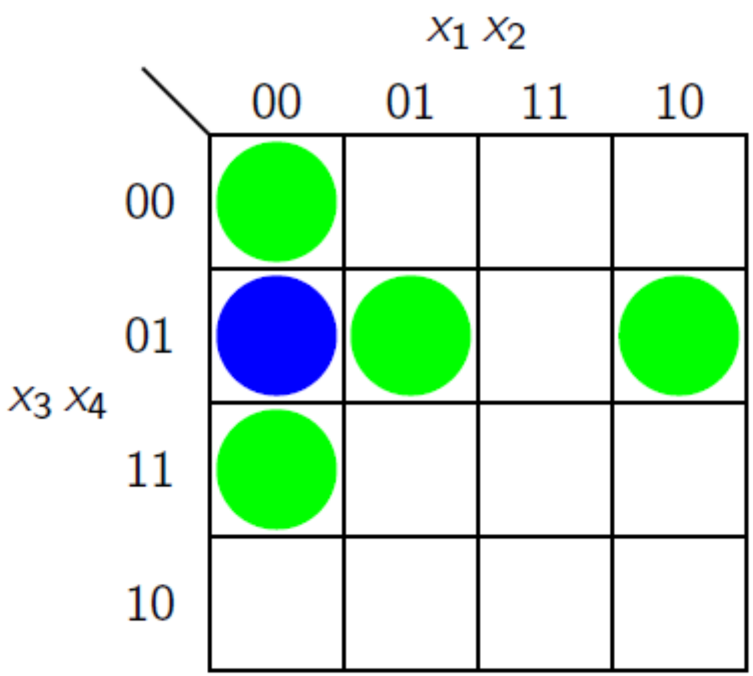
Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f:\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



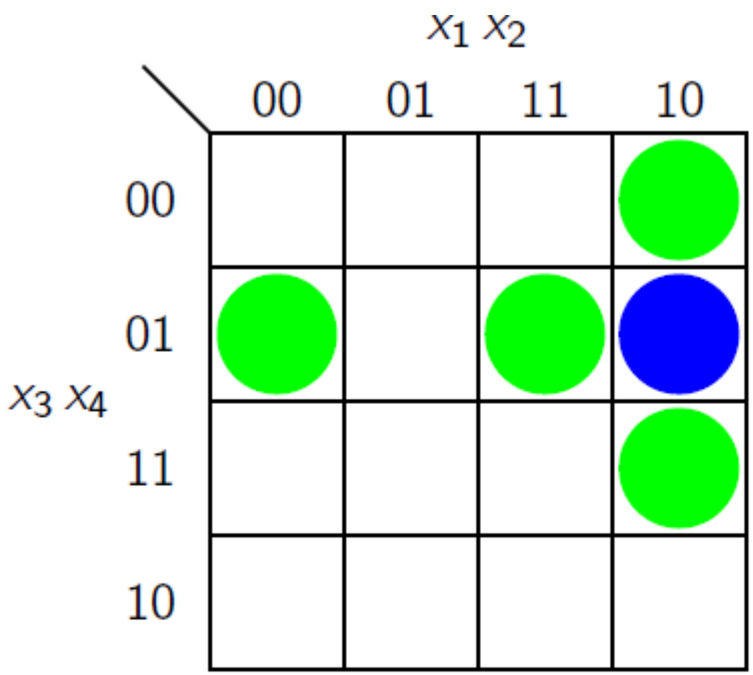
Hinweis: Nachbarschaften sind zyklisch

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur

in einer Stelle



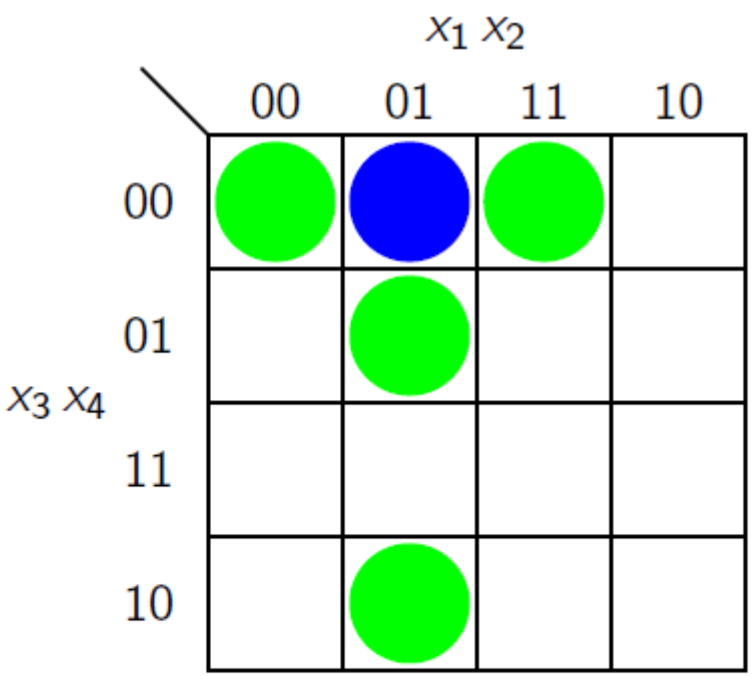
Hinweis: Nachbarschaften sind zyklisch

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur

in einer Stelle

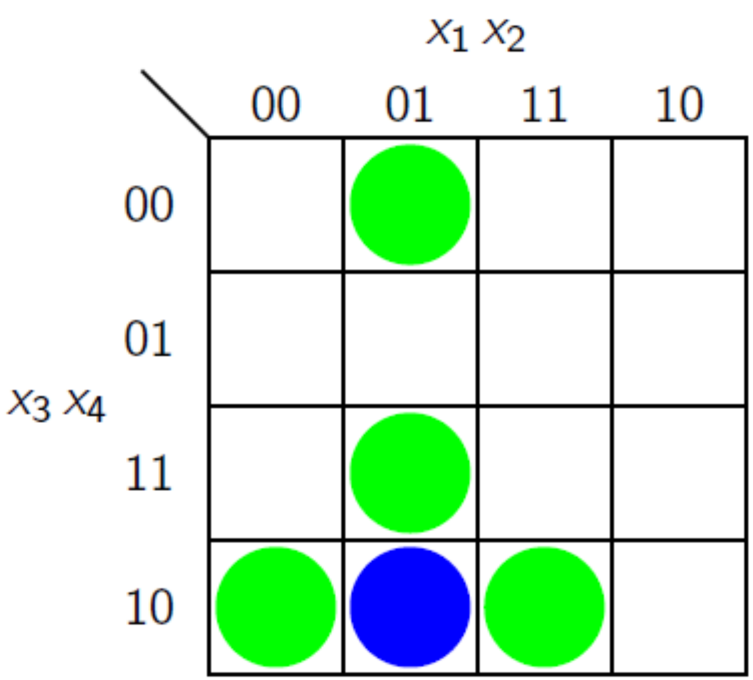


Hinweis: Nachbarschaften sind zyklisch

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



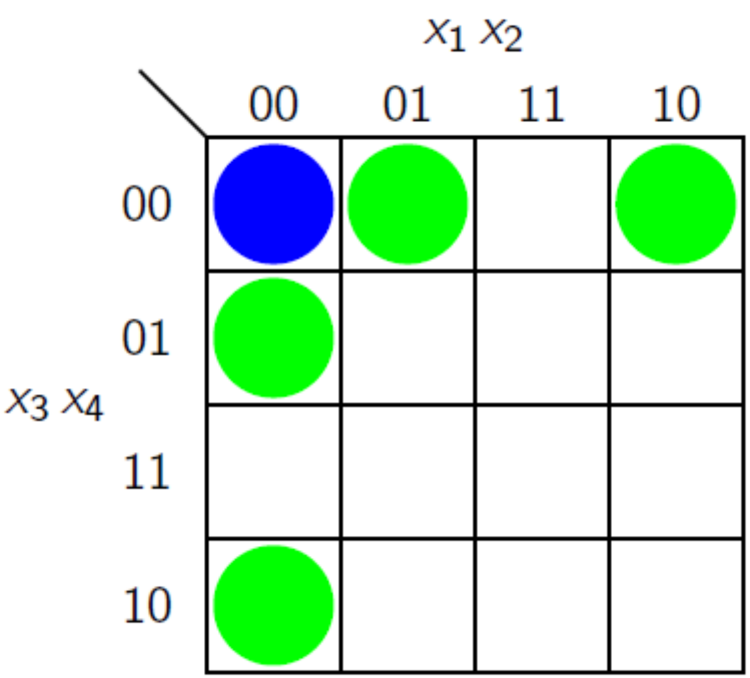
Hinweis: Nachbarschaften sind zyklisch

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur

in einer Stelle

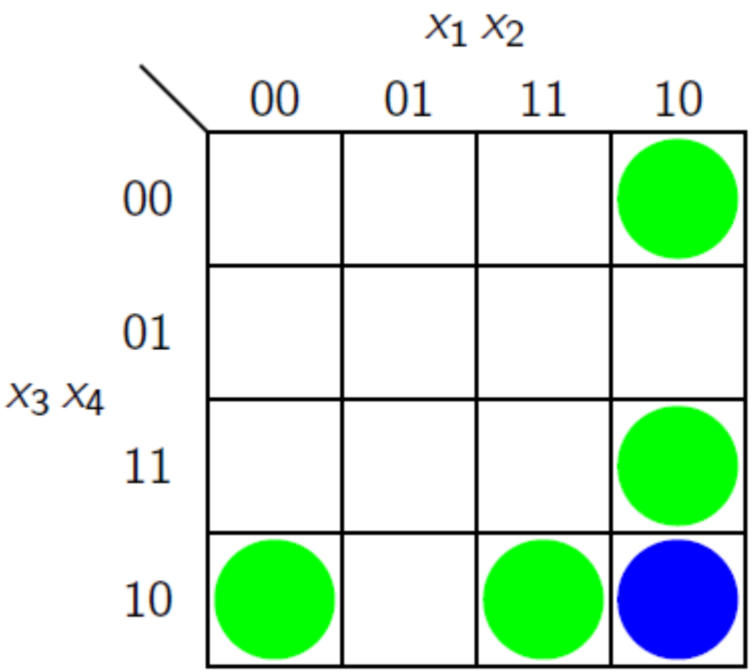


Hinweis: Nachbarschaften sind zyklisch

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



Hinweis: Nachbarschaften sind zyklisch

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $\boldsymbol{f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}}$

$f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $\boldsymbol{f}: \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^4 \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

f: $\{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, \ldots, x_4)$
0	0	0	0	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	0	1	1	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	1	1	1	0

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

f: $\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, \dots, x_4)$
0	0	0	0	1
	⋮			⋮
1	0	1	1	1
	⋮			⋮
1	1	1	1	0

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

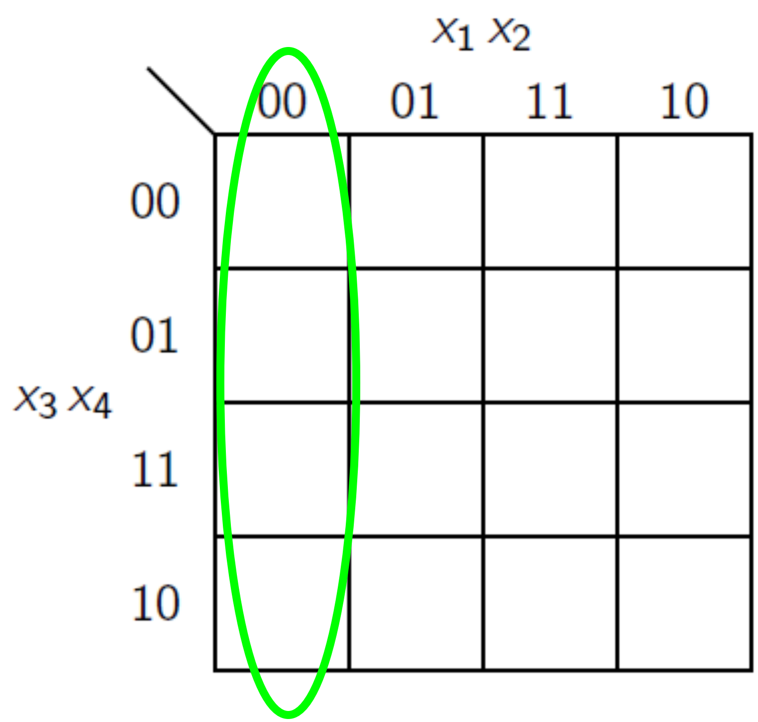
Was fällt bei der Variablenbelegung auf? Warum ist das so?

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, \dots, x_4)$
0	0	0	0	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	0	1	1	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	1	1	1	0

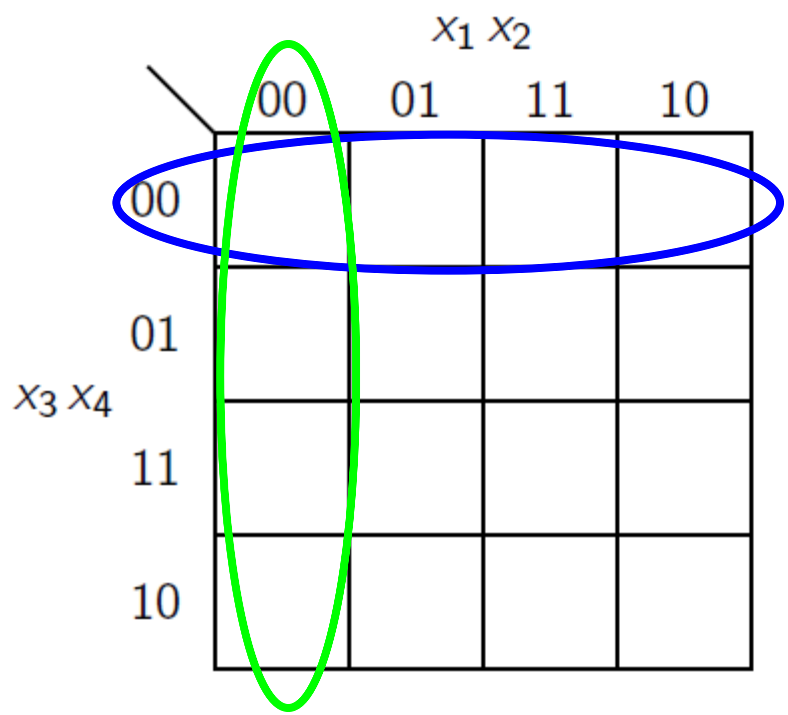


6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

$f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, \ldots, x_4)$
0	0	0	0	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	0	1	1	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	1	1	1	0

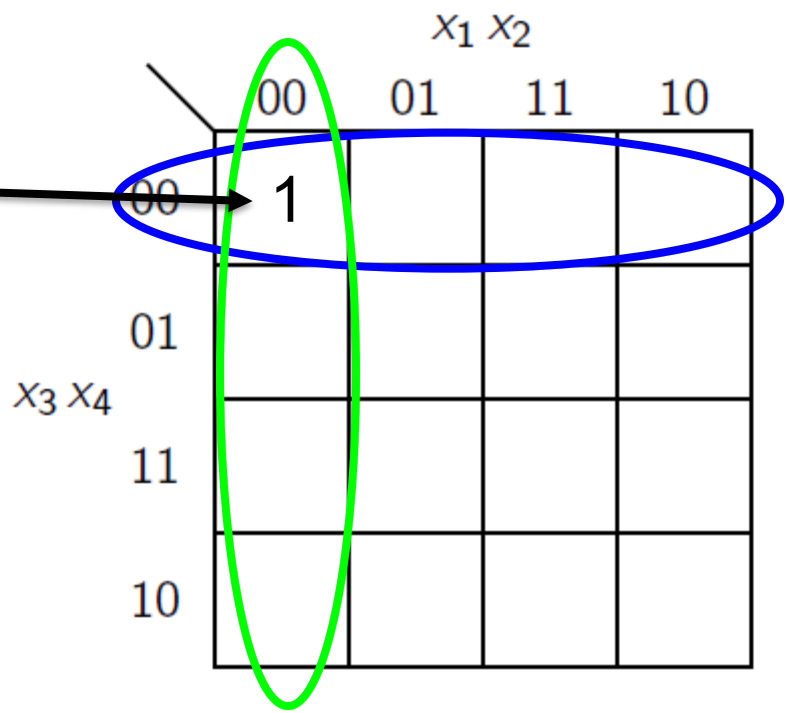


6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $\boldsymbol{f}: \{\mathbf{0,1}\}^{\mathbf{4}} \rightarrow \{\mathbf{0,1}\}$

f: $\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

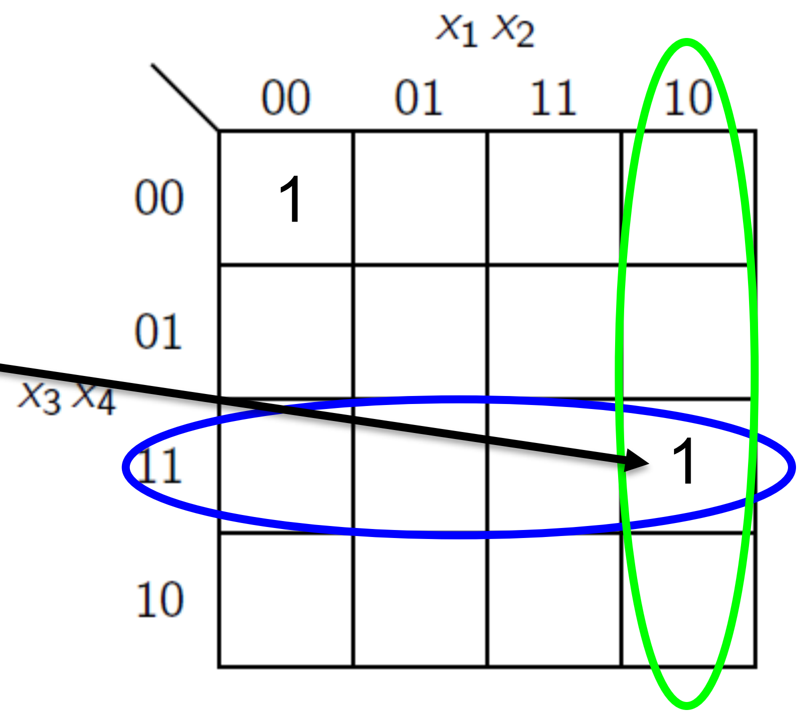
x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,\dots,x_4)$
0	0	0	0	1
	⋮			⋮
1	0	1	1	1
	⋮			⋮
1	1	1	1	0



KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

f: $\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, \ldots, x_4)$
0	0	0	0	1
	⋮			⋮
1	0	1	1	1
	⋮			⋮
1	1	1	1	0

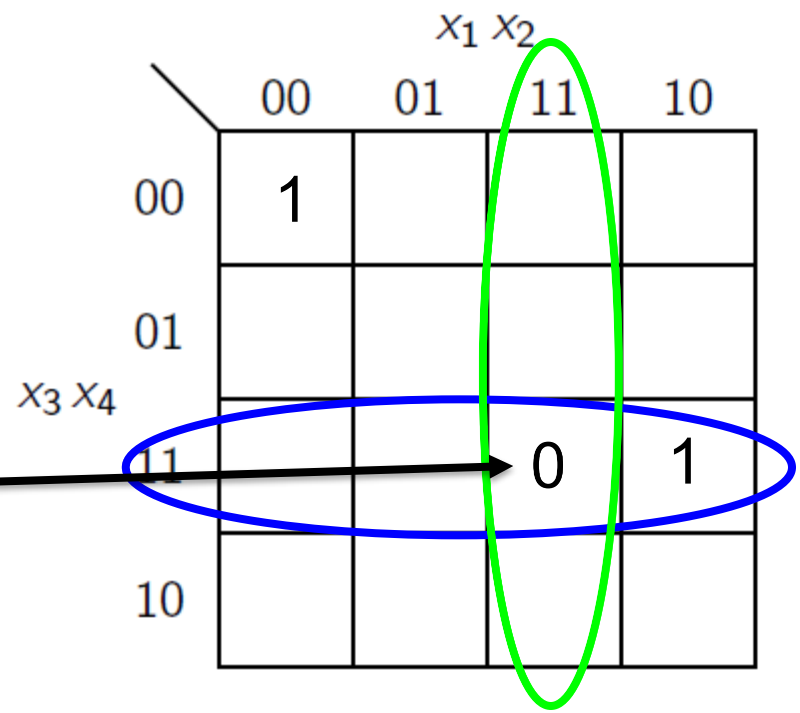


6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

f: $\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, \ldots, x_4)$
0	0	0	0	1
	⋮			⋮
1	0	1	1	1
	⋮			⋮
1	1	1	1	0



6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

$f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, \dots, x_4)$
0	0	0	0	1
	⋮			⋮
1	0	1	1	1
	⋮			⋮
1	1	1	1	0

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	1	1	0	1

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

$f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit Wertevektor (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,\dots,x_4)$
0	0	0	0	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	0	1	1	1
	$\vdots$			$\vdots$
1	1	1	1	0

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				1
10	1	1		1

Nullen weglassen

für mehr Übersichtlichkeit

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				1
10	1	1		1

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

6.3 KV-Diagramme

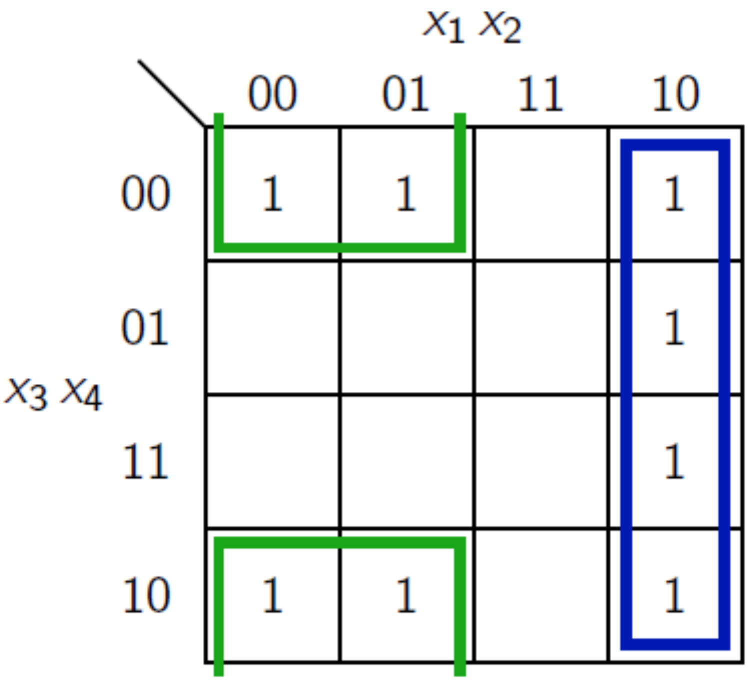
KV-Diagramm für Beispielfunktion $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				1
10	1	1		1

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

6.3 KV-Diagramme

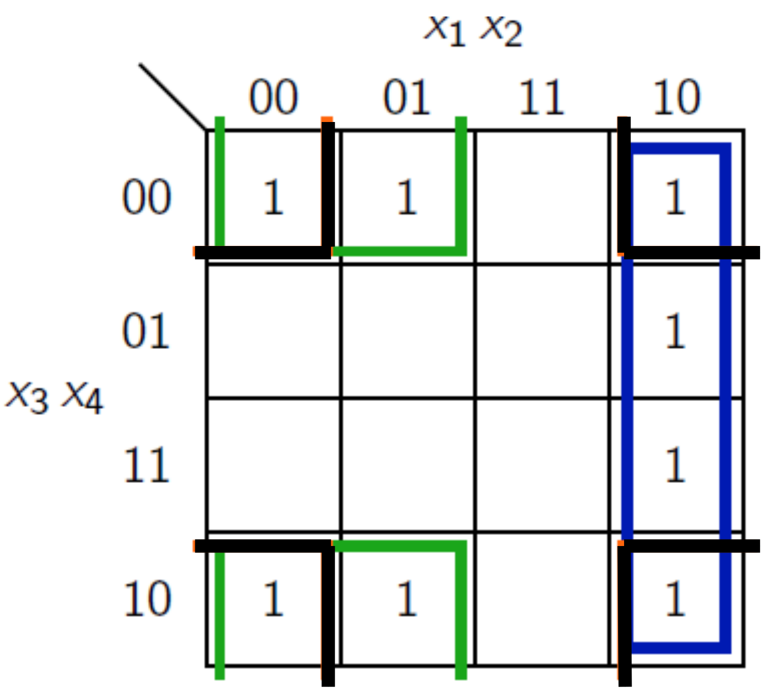
KV-Diagramm für Beispielfunktion $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$



Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

6.3 KV-Diagramme

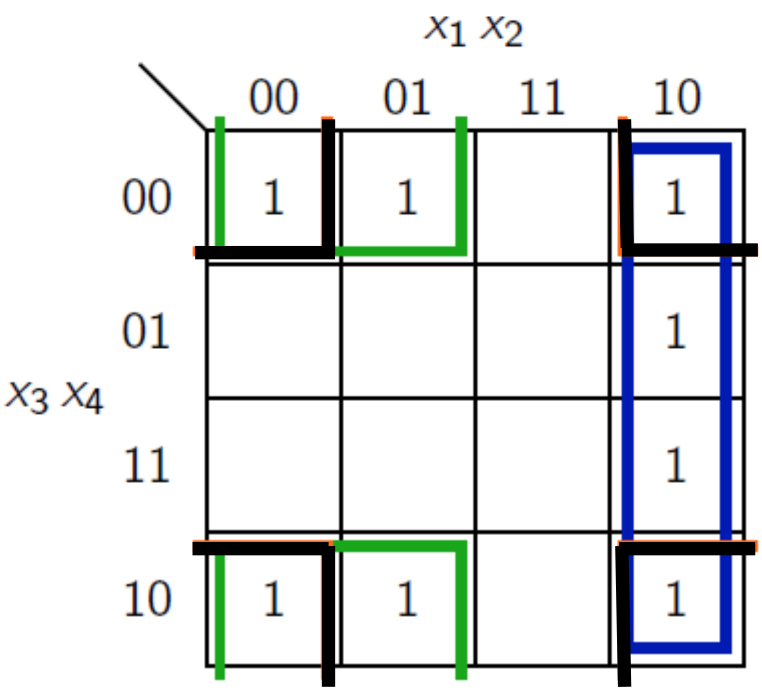
KV-Diagramm für Beispielfunktion $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$



Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

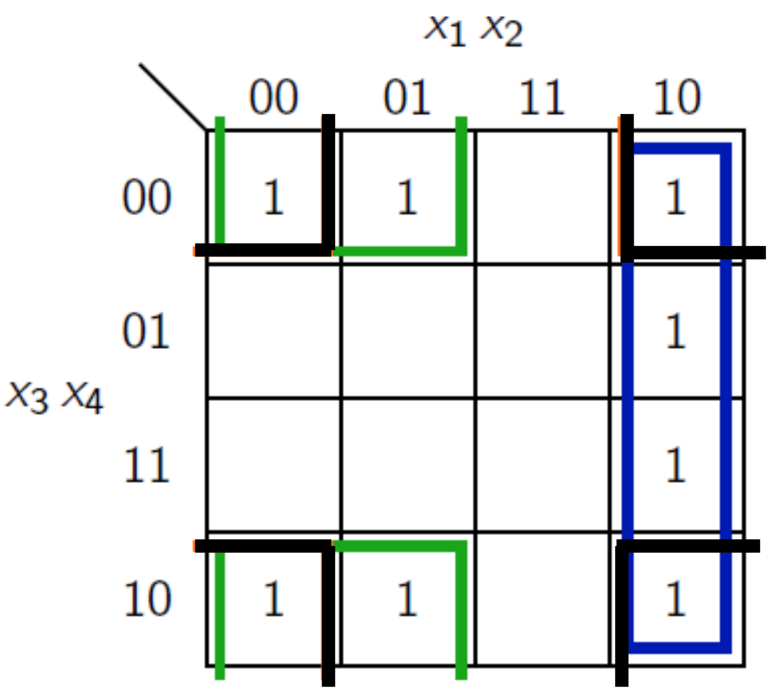


Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$



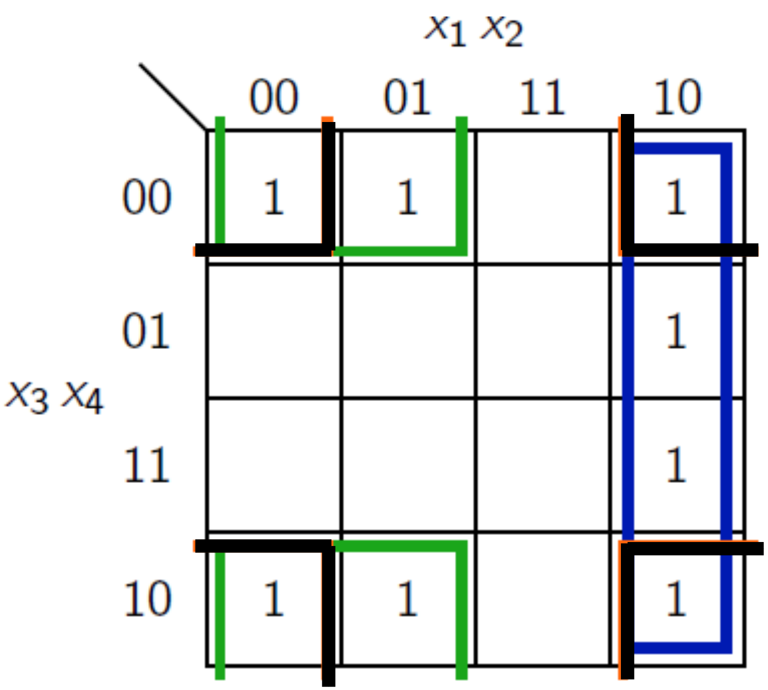
$x_1 = 1, x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1\,\overline{x_2}$

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$



$x_1 = 1, x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1\,\overline{x_2}$

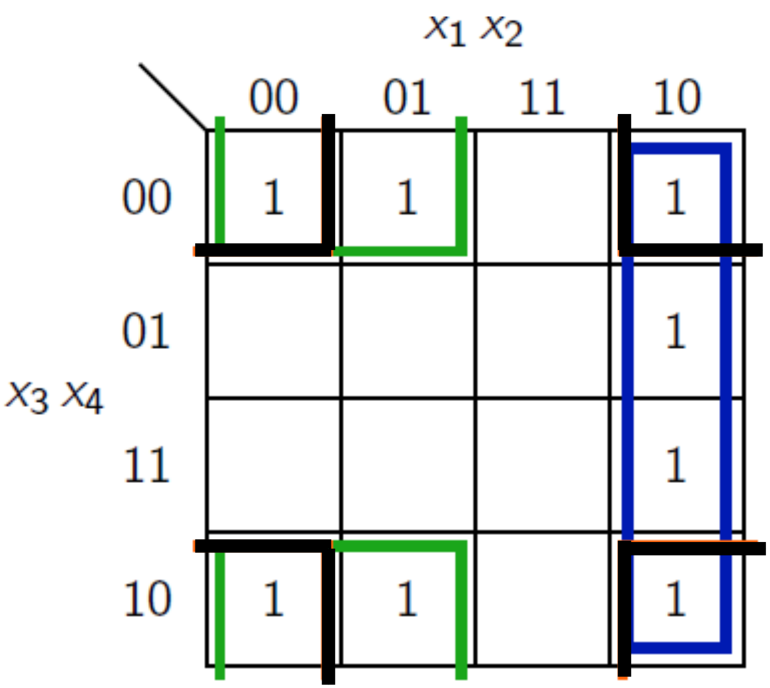
$x_1 = 0, x_4 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$



$x_1 = 1, x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1\,\overline{x_2}$

$x_1 = 0, x_4 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

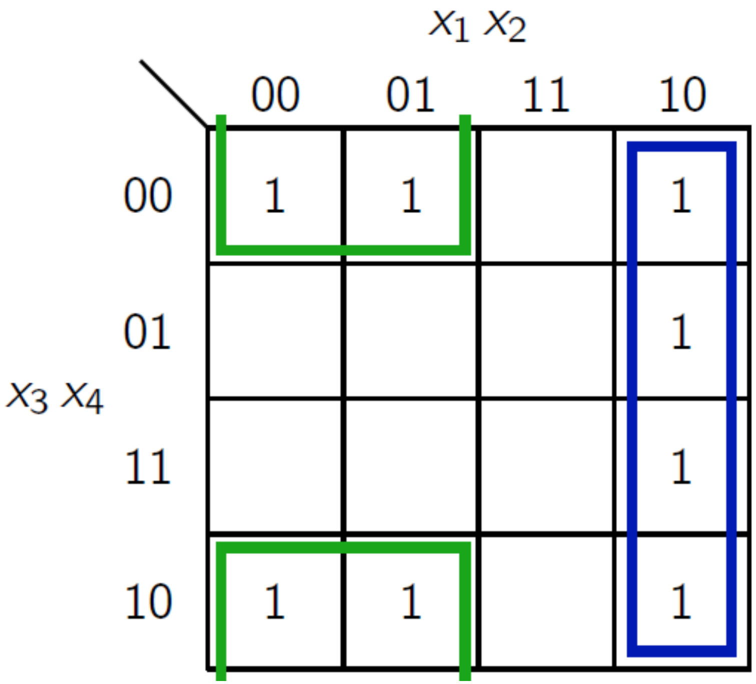
$x_2 = 0, x_4 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{x_2}\,\overline{x_4}$

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$



$x_1 = 1, x_2 = 0 \ \Rightarrow x_1\,\overline{x_2}$

$x_1 = 0, x_4 = 0 \ \Rightarrow \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

$x_2 = 0, x_4 = 0 \ \Rightarrow \overline{x_2}\,\overline{x_4}$

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.

Decke alle Einsen durch sparsame Rechteckauswahl ab.

6.3 KV-Diagramme

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f:\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				1
10	1	1		1

$x_1 = 1, x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1\,\overline{x_2}$

$x_1 = 0, x_4 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

$x_2 = 0, x_4 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{x_2}\,\overline{x_4}$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.

Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.

Decke alle Einsen durch sparsame Rechteckauswahl ab.

Bilde f als Disjunktion der korrespondierenden Monome.

6.3 KV-Diagramme

Einordnung KV-Diagramme

Was leisten KV-Diagramme?

Beobachtung	Wir lösen mit KV-Diagrammen ein Problem, das wir noch gar nicht definiert haben.
klar	Wir holen das jetzt nach.

vorab Begriffsfestlegungen

- **Variable** — Beispiele $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- **Literale** Variable und Negationen — Beispiele $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots$
- **Monom** Konjunktion einiger Literale — Beispiele $x_1 \overline{x_3} x_4, x_2$
- **Polynom** Disjunktion einiger Monome — Beispiel $\overline{x_1}\, x_3 \bigvee\, x_2 \bigvee\, \overline{x_4}\, x_5$

6.3 KV-Diagramme

Weitere Begriffsdefinitionen

Wir haben schon **Variable**, **Literal**, **Monom**, **Polynom**.

- **Implikant von f**
  Monom m mit folgender Eigenschaft:
  $$\forall x \epsilon \{0,1\}^n : m(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$
  Beispiel Monom (auch Minterm) eines Polynoms für f

- **Verkürzung eines Monoms m**
  Monom m', für das m **Implikant** ist

  Beispiel $x_1\overline{x_3}$ ist Verkürzung von $x_1\overline{x_3}$

  Beispiel $\overline{x_3}$ ist Verkürzung von $x_1\overline{x_3}$

6.3 KV-Diagramme

Weitere Begriffsdefinitionen

- **echte Verkürzung eines Monoms m**
  Monom m′, das **Verkürzung**

  von m ist und echt weniger **Literale** enthält

  Beispiel $\overline{x_3}$ ist echte Verkürzung von $x_1\overline{x_3}$

- **Primimplikant von f**
  Implikant von f , für den es keine **echte**

  Verkürzung gibt, die auch **Implikant** von f ist

  Beispiel $\overline{x_2}\, x_3$ ist Primimplikant von $x_1 \vee \overline{x_2}\, x_3$

6.3 KV-Diagramme

Verbindung zu Schaltnetzen

Erinnerung Wir zählen keine Negationen mehr.

Monom mit i Literalen

- Und-Gatter mit Fan-In i
- oder i − 1 Und-Gatter mit Fan-In 2
- angemessen Kosten i

Polynom mit j Monomen

- zusätzlich Oder-Gatter mit Fan-In j oder
- j − 1 Oder-Gatter mit Fan-In 2
- angemessen zusätzlich Kosten j

→ direkte Verbindung zwischen Polynom-Kosten und Schaltnetz-Kosten

Noch ein letzter Begriff

Minimalpolynom zu f Polynom für f mit minimalen Kosten unter allen Polynomen für f

6.3 KV-Diagramme

Minimalpolynome

→ Minimalpolynome liefern ”günstigste“ Schaltnetze. . .

Vorsicht

- Stimmt nicht so ganz!
- nur richtig, wenn man sich auf
- direkte Polynomrealisierung einschränkt
- trotzdem suchen wir Minimalpolynome

Wie finden wir systematisch Minimalpolynome?

6.3 KV-Diagramme

Minimalpolynome und Primimplikanten

Theorem Minimalpolynome enthalten nur Primimplikanten.

Beweis (indirekt)

Annahme $f = m_1 \vee m_2 \vee \ \ldots \ \vee m_i$ Minimalpolynom, m_1 kein Primimplikant zu f

gemäß Definition $\exists m'$: m_1 ist Implikant von m', m' ist echte Verkürzung von m_1 und m' ist Implikant von f

klar $m_1 = 1 \Rightarrow m' = 1$, da m_1 Implikant von m'

Beobachtung $m' = 1 \Rightarrow f = 1$, da m' Implikant von f ist

also $m' \vee m_2 \vee \ \ldots \ \vee m_i$ ist günstigeres Polynom für f

Widerspruch zur Voraussetzung, dass $m_1 \vee m_2 \vee \ \ldots \ \vee m_i$ Minimalpolynom für f

6.3 KV-Diagramme

Minimalpolynomberechnung

Idee für Minimalpolynomberechnung

1. Berechne alle Primimplikanten von f.
2. Berechne günstigste

”Überdeckung“ von f mit diesen Monomen.

Beobachtung Dieser Ansatz ist sicher schlecht, wenn das Minimalpolynom zu f klein ist, f aber viele Primimplikanten hat.

Wir verfolgen diesen Ansatz dennoch.

6.3 KV-Diagramme

Minimalpolynomberechnung

Behauptung Wir haben mit KV-Diagrammen Minimalpolynome berechnet.

Das bedeutet Wir haben günstigste Überdeckung von f gesucht.

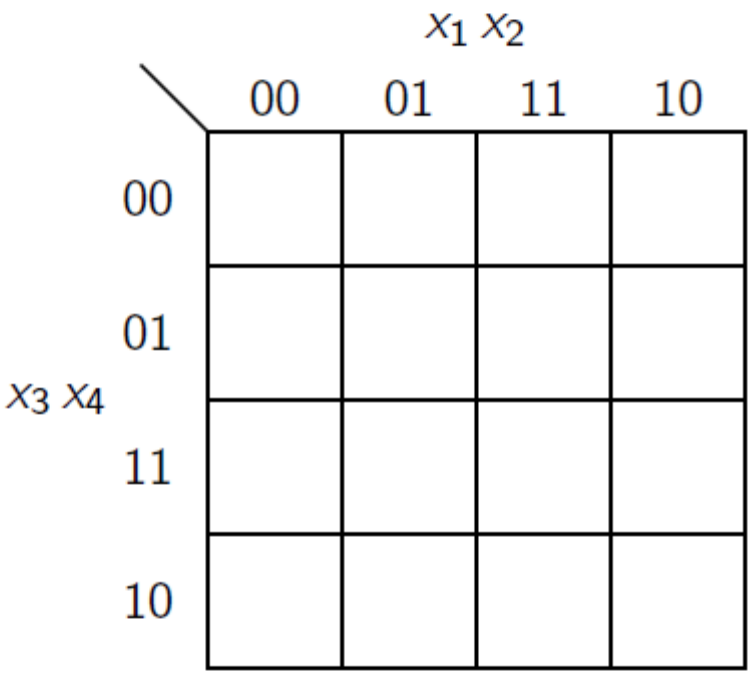
Entsprechen maximale Rechtecke mit Zweierpotenzseitenlängen genau Primimplikanten?

Es gilt Für $f:\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ gibt es Monome der Längen 0, 1, 2, 3 und 4.

Wir schauen uns die Situation für jede mögliche Monomlänge an.

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 0



6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 0

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Monom 1

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 1

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11			1	1
10			1	1

Monom x_1

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11	1	1		
10	1	1		

Monom $\overline{x_1}$

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11		1	1	
10		1	1	

Monom x_2

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1			1
10	1			1

Monom $\overline{x_2}$

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Monom x_3

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11				
10				

Monom $\overline{x_3}$

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

Monom x_4

6.3 KV-Diagramme

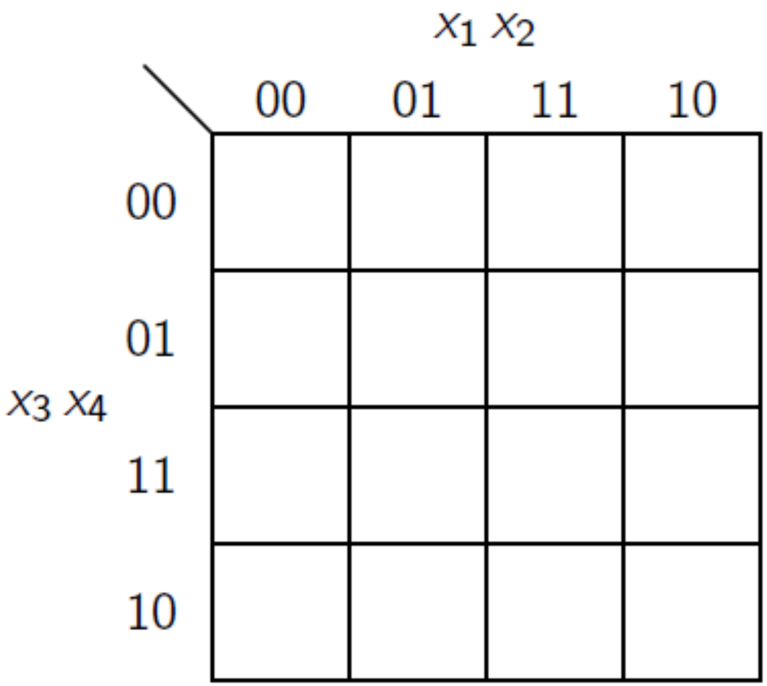
Primimplikanten der Länge 1

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

Monom $\overline{x_4}$

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 2



6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 2

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10	1	1		

Monom $\overline{x_1}x_3$

6.3 KV-Diagramme

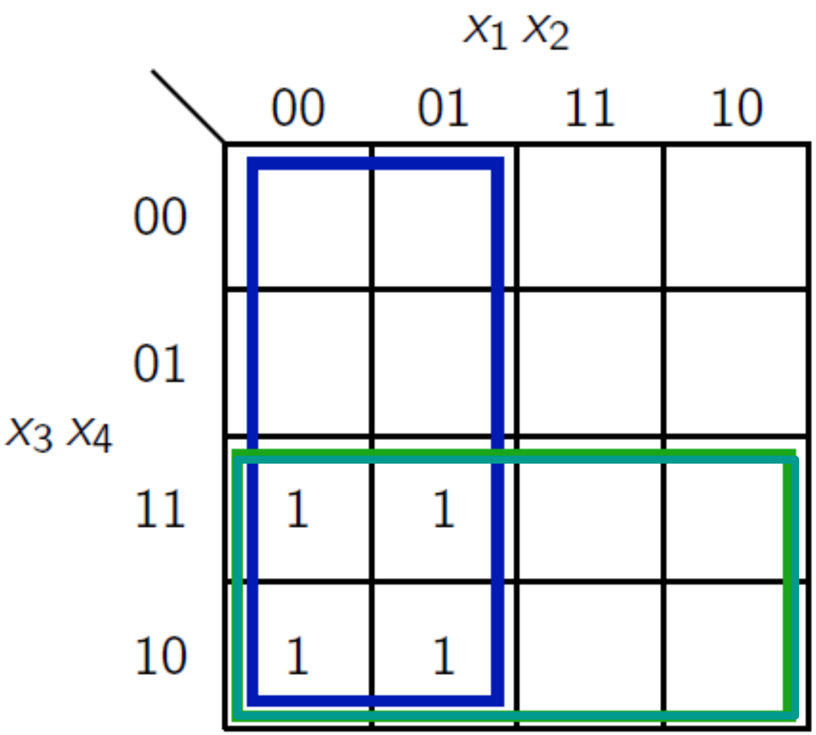
Primimplikanten der Länge 2

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10	1	1		

Monom $\overline{x_1}x_3$

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 2



Monom $\overline{x_1}x_3$

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 3

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

6.3 KV-Diagramme

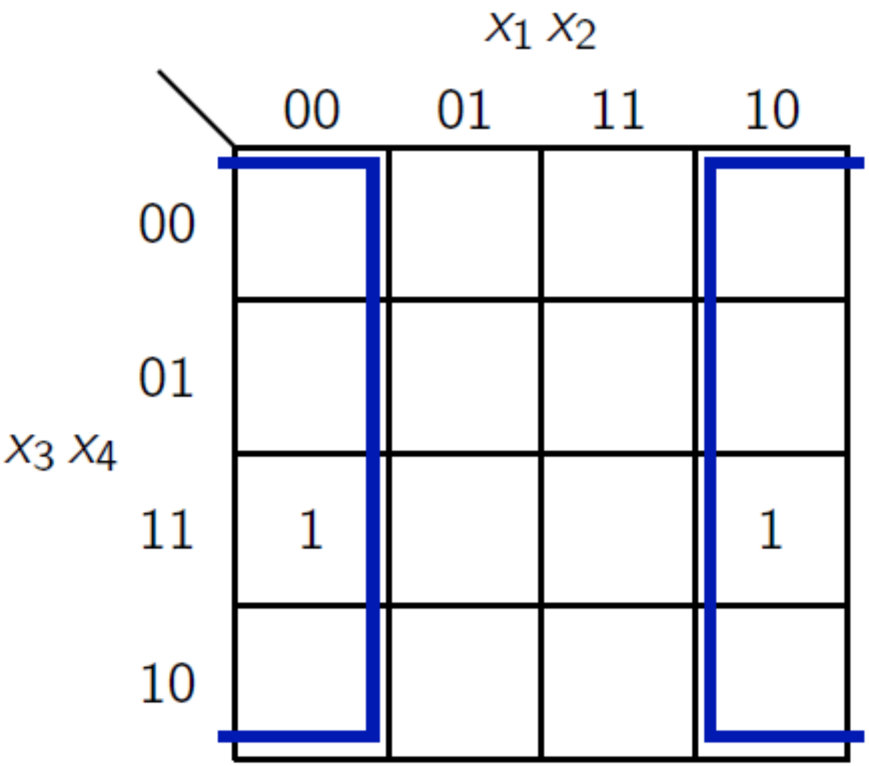
Primimplikanten der Länge 3

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11	1			1
10				

Monom $\overline{x_2}x_3x_4$

6.3 KV-Diagramme

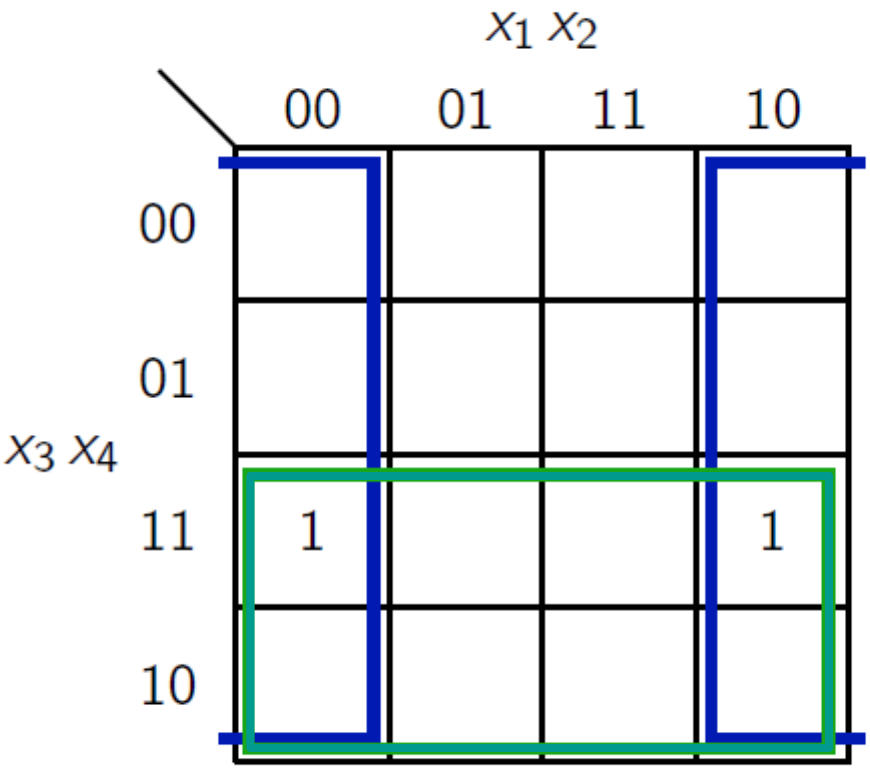
Primimplikanten der Länge 3



Monom $\overline{x_2}x_3x_4$

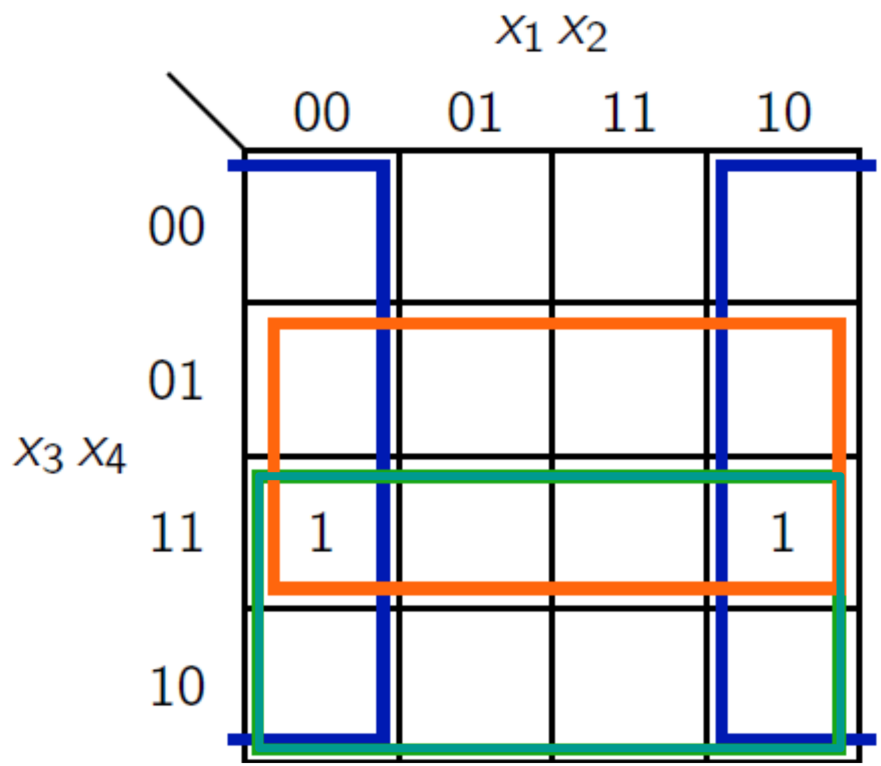
6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 3



Monom $\overline{x_2}x_3x_4$

Primimplikanten der Länge 3



Monom $\overline{x_2}x_3x_4$

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 4

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

6.3 KV-Diagramme

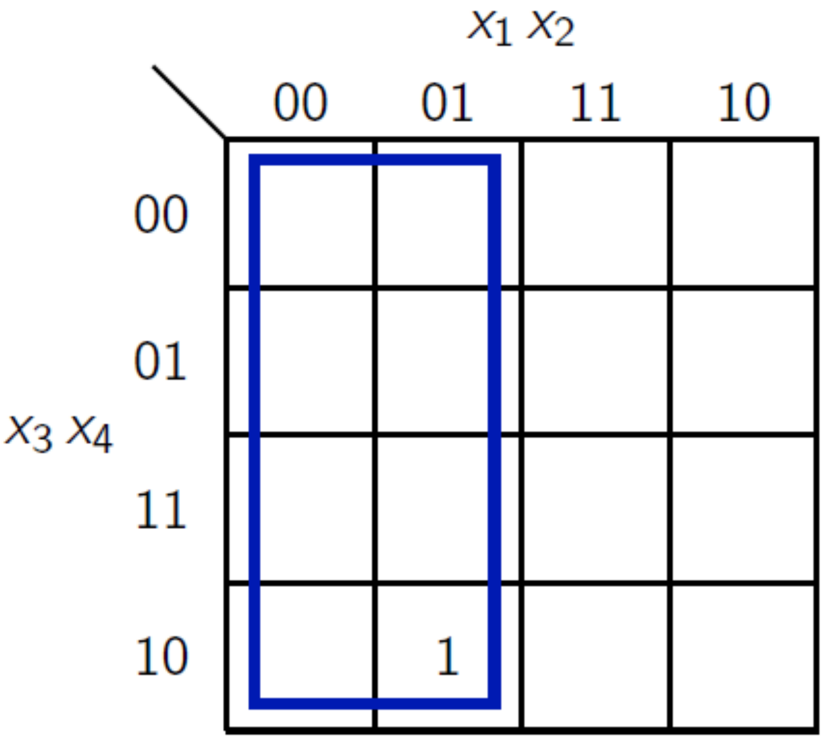
Primimplikanten der Länge 4

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10		1		

Monom $\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

6.3 KV-Diagramme

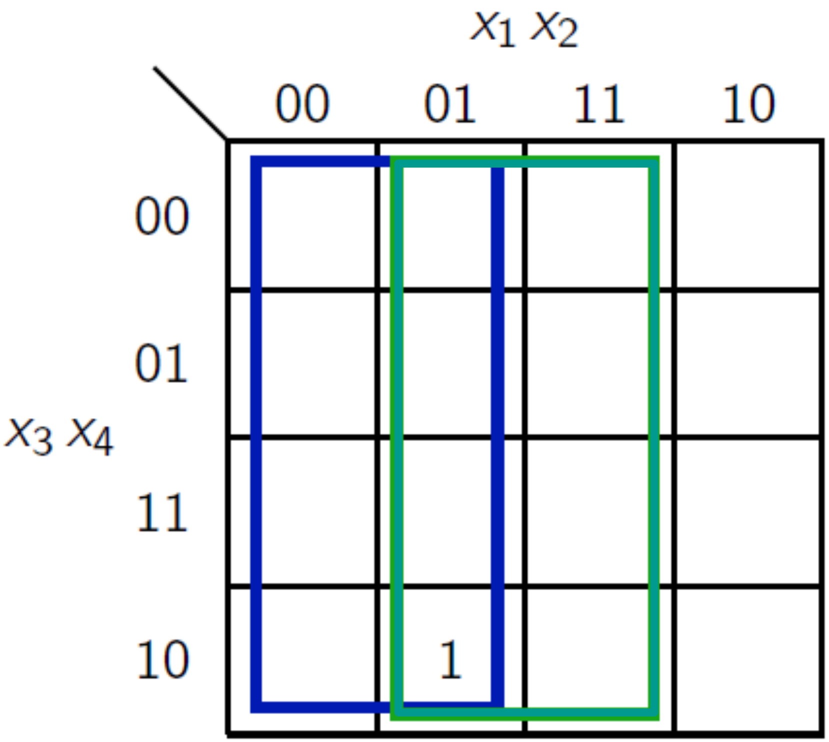
Primimplikanten der Länge 4



Monom $\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

6.3 KV-Diagramme

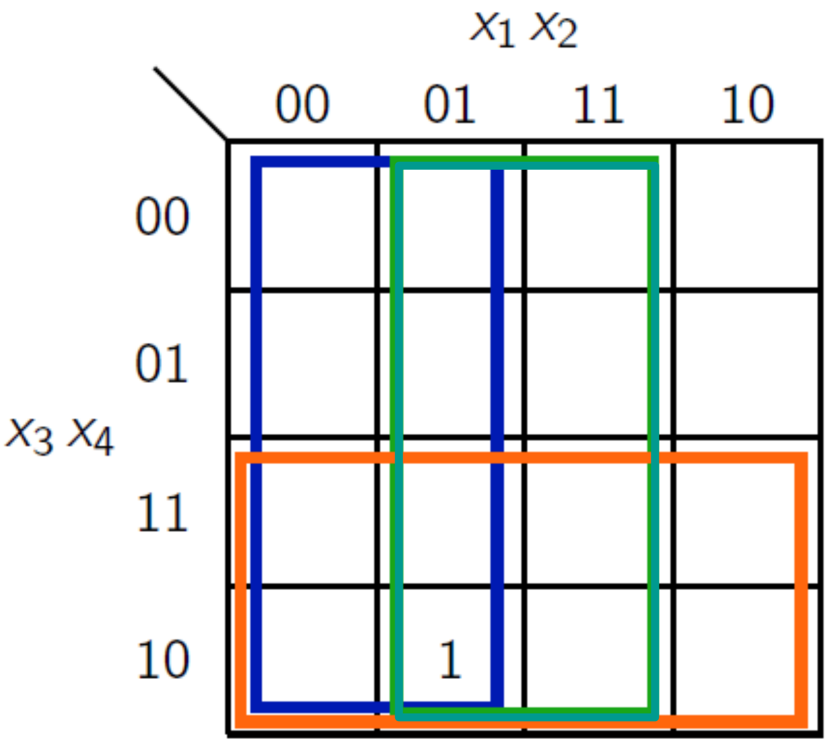
Primimplikanten der Länge 4



Monom $\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

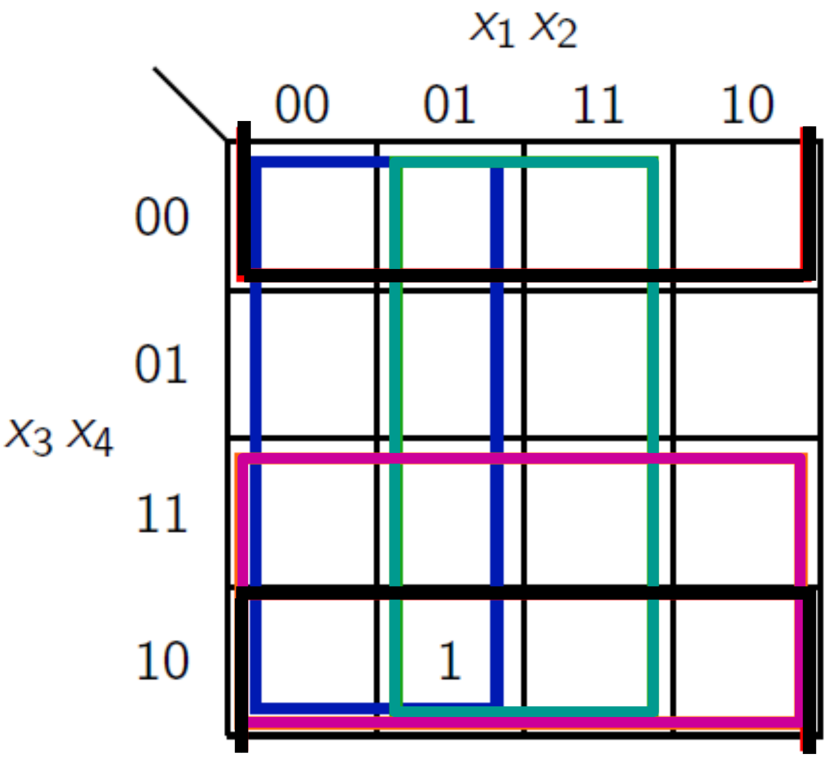
6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 4



Monom $\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4}$

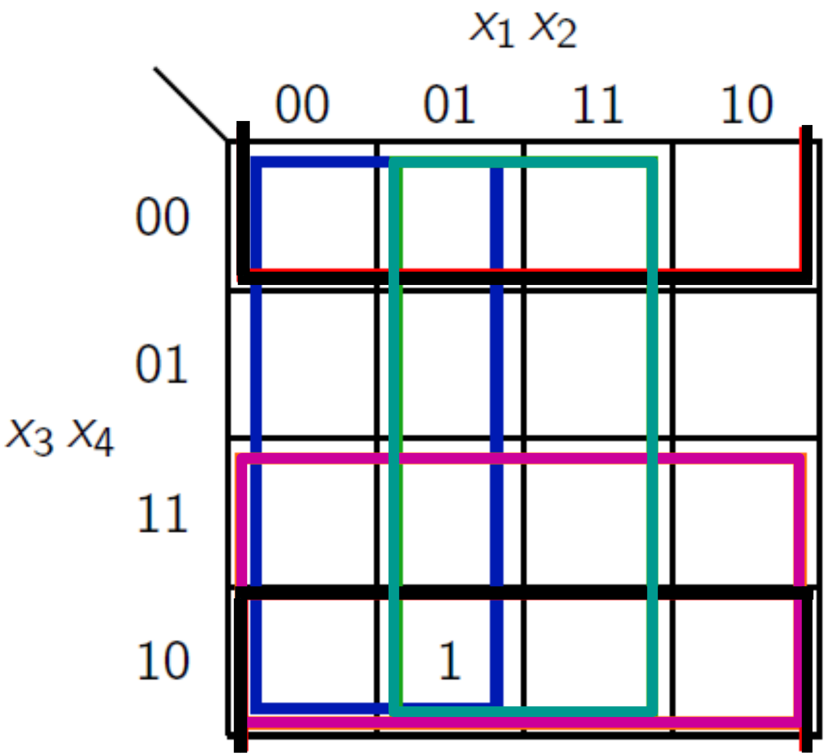
Primimplikanten der Länge 4



Monom $\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4}$

6.3 KV-Diagramme

Primimplikanten der Länge 4



Monom $\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

Beobachtung Primimplikanten entsprechen genau KV-Rechtecken

6.3 KV-Diagramme

Minimalpolynombestimmung mit KV-Diagramm

Aufgabe Bestimme für $f: \{0, 1\}^4 \to \{0, 1\}$ ein Minimalpolynom.

Vorgehen

1. Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm
2. Finden aller maximaler Zweierpotenz-Rechtecke
3. Finden eines Primimplikanten für jedes Rechteck
4. Finden einer Überdeckung aller Einsen durch eine minimale Monomauswahl

jetzt noch ein Beispiel

$f: \{0, 1\}^4 \to \{0, 1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)

Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm

$$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\} \text{ mit } (\overset{0}{1}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{1}, \overset{4}{0}, \overset{5}{1}, \overset{6}{0}, \overset{7}{1}, \overset{8}{0}, \overset{9}{1}, \overset{10}{0}, \overset{11}{1}, \overset{12}{0}, \overset{13}{0}, \overset{14}{1}, \overset{15}{1})$$

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$0 = (0000)_2$$
$$1 = (0001)_2$$
$$2 = (0010)_2$$
$$3 = (0011)_2$$
$$4 = (0100)_2$$
$$5 = (0101)_2$$
$$6 = (0110)_2$$
$$7 = (0111)_2$$
$$8 = (1000)_2$$
$$9 = (1001)_2$$
$$10 = (1010)_2$$
$$11 = (1011)_2$$
$$12 = (1100)_2$$
$$13 = (1101)_2$$
$$14 = (1110)_2$$
$$15 = (1111)_2$$

6.3 KV-Diagramme

Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

$0 = (0000)_2$
$1 = (0001)_2$
$2 = (0010)_2$
$3 = (0011)_2$
$4 = (0100)_2$
$5 = (0101)_2$
$6 = (0110)_2$
$7 = (0111)_2$
$8 = (1000)_2$
$9 = (1001)_2$
$10 = (1010)_2$
$11 = (1011)_2$
$12 = (1100)_2$
$13 = (1101)_2$
$14 = (1110)_2$
$15 = (1111)_2$

6.3 KV-Diagramme

Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

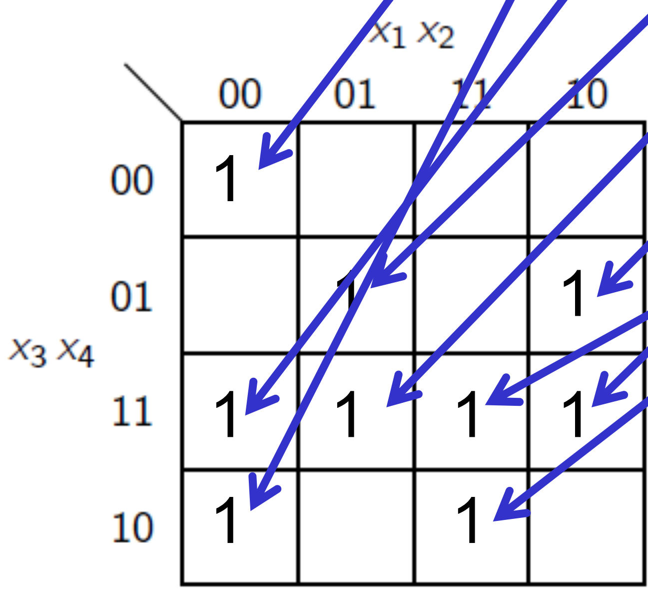
$0 = (0000)_2$
$1 = (0001)_2$
$2 = (0010)_2$
$3 = (0011)_2$
$4 = (0100)_2$
$5 = (0101)_2$
$6 = (0110)_2$
$7 = (0111)_2$
$8 = (1000)_2$
$9 = (1001)_2$
$10 = (1010)_2$
$11 = (1011)_2$
$12 = (1100)_2$
$13 = (1101)_2$
$14 = (1110)_2$
$15 = (1111)_2$

6.3 KV-Diagramme

Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$f:\{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$0 = (0000)_2$
$1 = (0001)_2$
$2 = (0010)_2$
$3 = (0011)_2$
$4 = (0100)_2$
$5 = (0101)_2$
$6 = (0110)_2$
$7 = (0111)_2$
$8 = (1000)_2$
$9 = (1001)_2$
$10 = (1010)_2$
$11 = (1011)_2$
$12 = (1100)_2$
$13 = (1101)_2$
$14 = (1110)_2$
$15 = (1111)_2$

6.3 KV-Diagramme

Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm

$$f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\} \text{ mit } (\overset{0}{1}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{1}, \overset{4}{0}, \overset{5}{1}, \overset{6}{0}, \overset{7}{1}, \overset{8}{0}, \overset{9}{1}, \overset{10}{0}, \overset{11}{1}, \overset{12}{0}, \overset{13}{0}, \overset{14}{1}, \overset{15}{1})$$

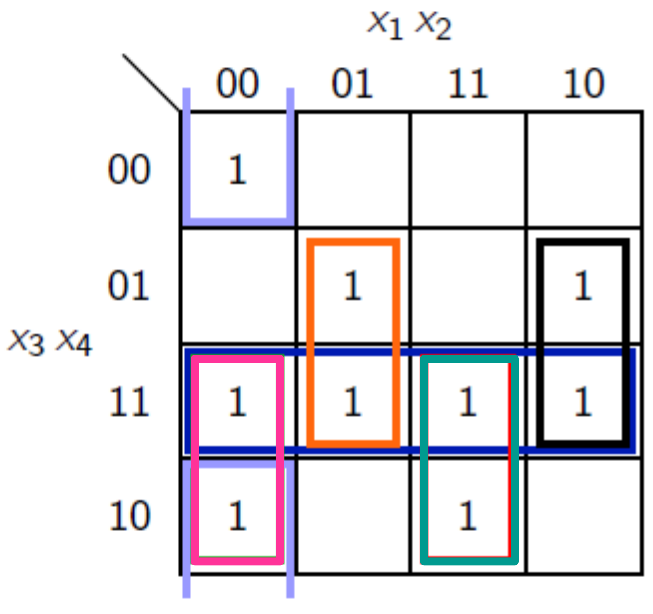
$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$$0 = (0000)_2$$
$$1 = (0001)_2$$
$$2 = (0010)_2$$
$$3 = (0011)_2$$
$$4 = (0100)_2$$
$$5 = (0101)_2$$
$$6 = (0110)_2$$
$$7 = (0111)_2$$
$$8 = (1000)_2$$
$$9 = (1001)_2$$
$$10 = (1010)_2$$
$$11 = (1011)_2$$
$$12 = (1100)_2$$
$$13 = (1101)_2$$
$$14 = (1110)_2$$
$$15 = (1111)_2$$

6.3 KV-Diagramme

Finden aller maximaler Zweierpotenz-Rechtecke

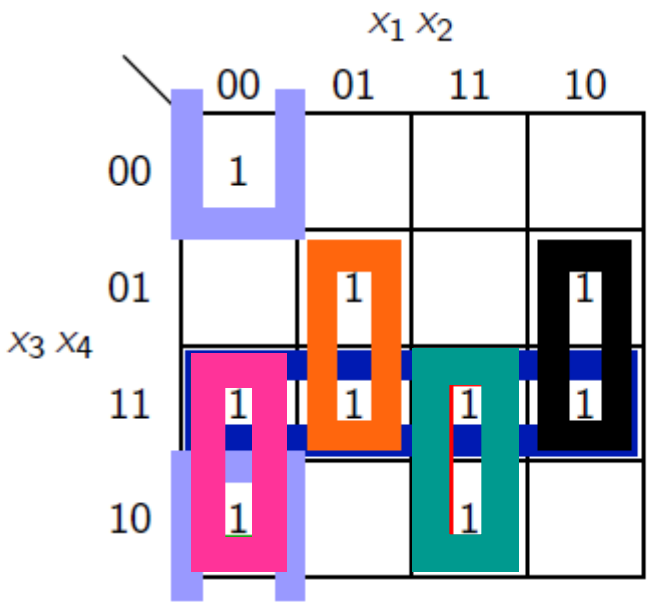
$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



6.3 KV-Diagramme

Finden eines Primimplikanten für jedes Rechteck

$f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$x_3 x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$

$x_1\,x_2\,x_3$

$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$

6.3 KV-Diagramme

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$x_3\, x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$

$x_1\,x_2\,x_3$

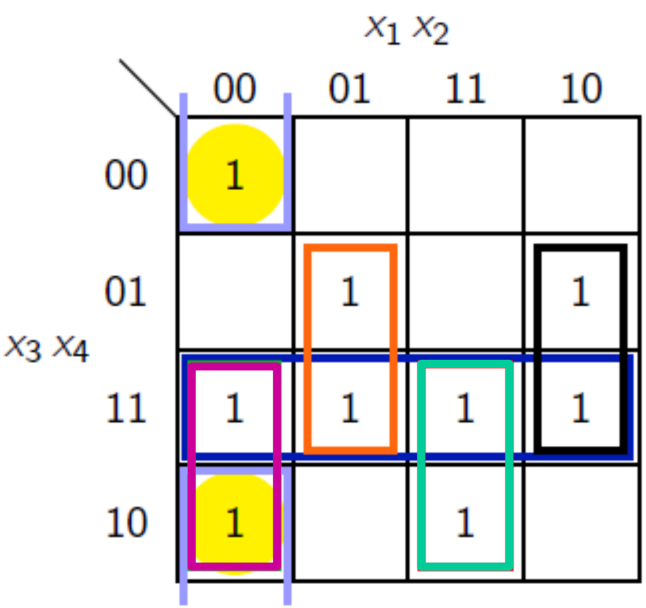
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$

6.3 KV-Diagramme

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$x_3\, x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$

$x_1\,x_2\,x_3$

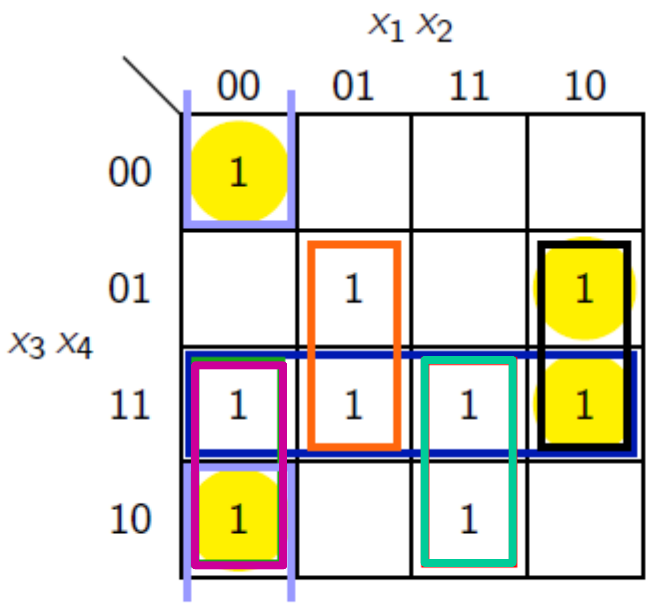
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ *erforderlich*

6.3 KV-Diagramme

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$x_3\, x_4$

$\overline{x_1}\, \overline{x_2}\, x_3$

$\overline{x_1}\, x_2\, x_4$

$x_1\, x_2\, x_3$

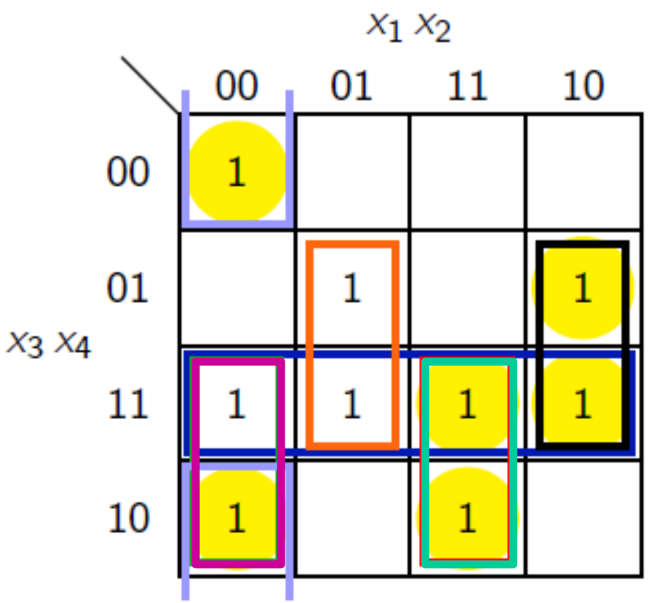
$x_1\, \overline{x_2}\, x_4$ *erforderlich*

$\overline{x_1}\, \overline{x_2}\, \overline{x_4}$ *erforderlich*

6.3 KV-Diagramme

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$x_3\,x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$

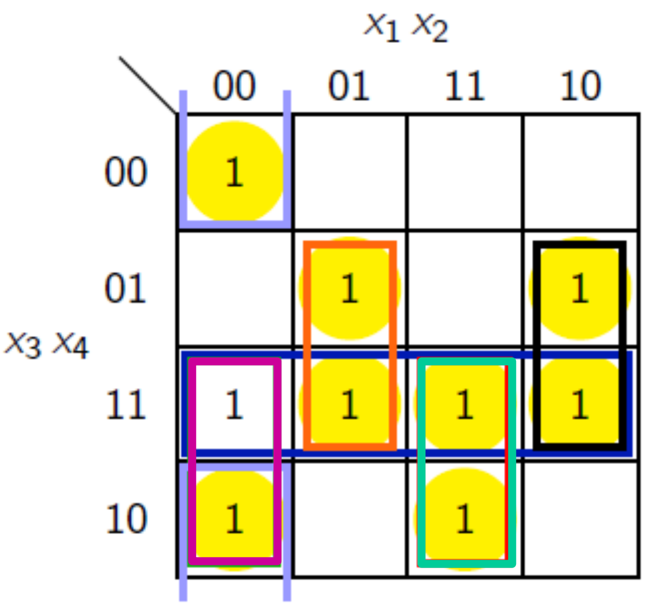
$x_1\,x_2\,x_3$ *erforderlich*

$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$ *erforderlich*

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ *erforderlich*

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$x_3\, x_4$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$ *erforderlich*

$x_1\,x_2\,x_3$ *erforderlich*

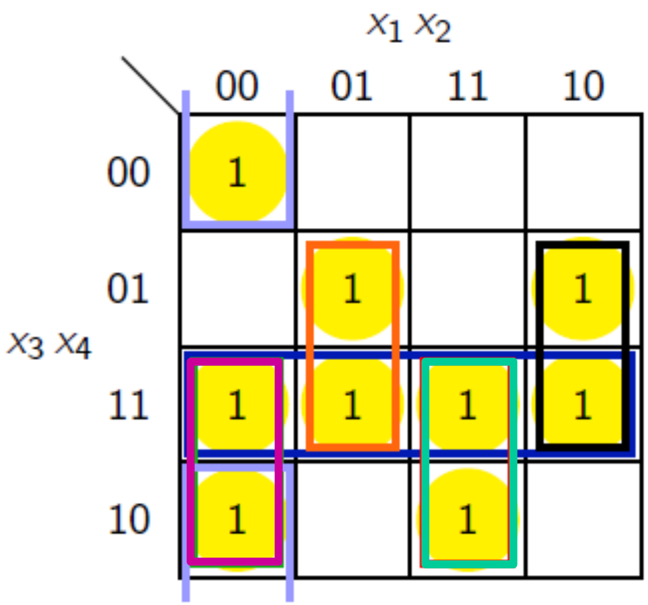
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$ *erforderlich*

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ *erforderlich*

6.3 KV-Diagramme

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$x_3\,x_4$ *beste Wahl*

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$ *erforderlich*

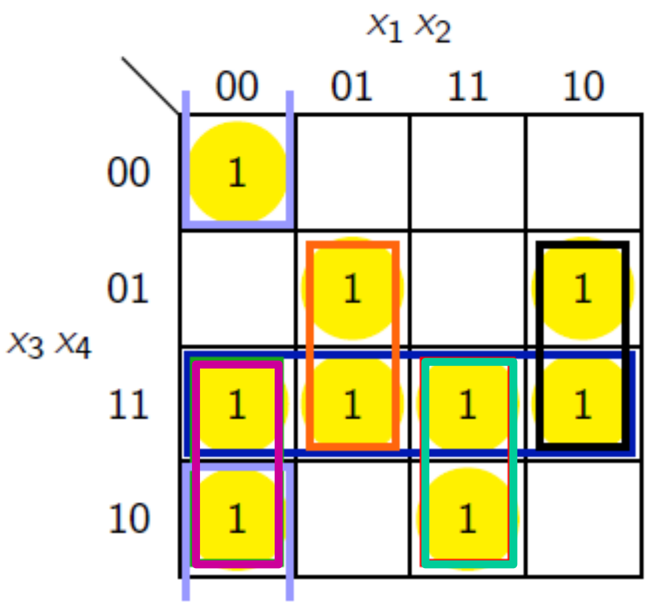
$x_1\,x_2\,x_3$ *erforderlich*

$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$ *erforderlich*

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ *erforderlich*

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)



$x_3\, x_4$ *beste Wahl*

$\overline{x_1}\, \overline{x_2}\, x_3$

$\overline{x_1}\, x_2\, x_4$ *erforderlich*

$x_1\, x_2\, x_3$ *erforderlich*

$x_1\, \overline{x_2}\, x_4$ *erforderlich*

$\overline{x_1}\, \overline{x_2}\, \overline{x_4}$ *erforderlich*

also $x_3\, x_4 \vee \overline{x_1}\, x_2\, x_4 \vee x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_4 \vee \overline{x_1}\, \overline{x_2}\, \overline{x_4}$
Minimalpolynom

6.3 KV-Diagramme

Anmerkungen zu KV-Diagramme

KV-Diagramm für 6 Variablen

00	01	05	04	14	15	11	10	b=0	d=0	f=0
02	03	07	06	16	17	13	12	b=1	d=0	f=0
0A	0B	0F	0E	1E	1F	1B	1A	b=1	d=1	f=0
08	09	0D	0C	1C	1D	19	18	b=0	d=1	f=0
28	29	2D	2C	3C	3D	39	38	b=0	d=1	f=1
2A	2B	2F	2E	3E	3F	3B	3A	b=1	d=1	f=1
22	23	27	26	36	37	33	32	b=1	d=0	f=1
20	21	25	24	34	35	31	30	b=0	d=0	f=1
a=0	a=1	a=1	a=0	a=0	a=1	a=1	a=0			
c=0	c=0	c=1	c=1	c=1	c=1	c=0	c=0			
e=0	e=0	e=0	e=0	e=1	e=1	e=1	e=1			

Quelle: Hand Lohninger

KV-Diagramm für 3 Variablen

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0				
1				

Fazit KV-Diagramme

Mit KV-Diagrammen effizient beide Schritte zur

Minimalpolynomberechnung durchführbar

1. Bestimmung aller Primimplikanten
2. Bestimmung einer minimalen Überdeckung für Funktionen
   $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ für $n \in \{3,4\}$

   klar   Das reicht nicht aus.

Wie bestimmen wir Minimalpolynome für $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

für größeres n?

klar   Wir suchen einen Algorithmus.

6. Optimierung von Schaltnetzen

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Willard van Orman Quine (1955)

Edward J. McCluskey (1956)

Algorithmus von Quine/McCluskey

- **Eingabe** Fkt. f als Liste aller Minterme zu einschlägigen Indizes
- **Ausgabe** Minimalpolynom zu f

Verfahren

1. Berechne PI, Menge aller Primimplikanten von f .
2. Berechne minimale f überdeckende Auswahl aus PI.

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Der Algorithmus von Quine und McCluskey: Erster Teil

Algorithmus 11 (Berechnung von PI)

Eingabe L_0: Liste aller Minterme zu einschlägigen Indizes von f

Ausgabe PI: Menge aller Primimplikanten zu f

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Korrektheit der PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$

…

Beweis

Behauptung L_i ist Menge aller Implikanten der Länge $n - i$

Induktionsanfang stimmt für L_0 ✓

Induktionsschluss **Annahme** stimmt für L_i

Es gilt: L_{i+1} enthält nur Monome der Länge $n - i - 1 = n - (i + 1)$ …

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Korrektheit der PI-Berechnung

Beweis

Es gilt: L_{i+1} enthält nur Monome der Länge $n - i - 1 = n - (i + 1)$ …

Beobachtung L_{i+1} enthält nur Implikanten

denn mx Implikant und $m\bar{x}$ Implikant

$\Rightarrow m$ Implikant (Resolution)

Beobachtung L_{i+1} enthält alle Implikanten

denn jeder Implikant m hat Verlängerung um 1 in L_i,

(Induktionsvoraussetzung), also kommt m nach L_{i+1} ✓

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Korrektheit der PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m |\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i\ |\ m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$

...

Terminierung

Wir haben L_i ist Liste Implikanten der Länge $n - i$

Es gilt Algorithmus 11 terminiert

denn spätestens $L_{n+1} = \emptyset$ ✓

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Korrektheit der PI-Berechnung

Beobachtung

- am Ende enthält PI alle **Primimplikanten**
- denn jeder Primimplikant ist Implikant, also in einer Liste vorhanden
- und Primimplikant hat **keine** Verkürzung, die auch Implikant ist,
- **wird deshalb zu PI hinzugefügt**

also Berechnung der PI nach Quine/McCluskey korrekt ✓

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

i =

PI =

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m|\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$$i = 0$$

$$PI = \emptyset$$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m |\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verk\ddot{u}rzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$$i = 0$$

$$PI = \emptyset$$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m | \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verk\text{ü}rzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 0$

$PI = \emptyset$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$L_1 =$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m |\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 0$

$PI = \emptyset$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$

$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \ldots\}$ wie berechnet man diese Menge geschickt?

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$L_1 =$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4$
$\overline{x_1}\,x_2\overline{x_3}\,x_4$
$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$

$\overline{x_1}x_2x_3x_4$
$x_1\overline{x_2}x_3x_4$
$x_1x_2x_3\overline{x_4}$

$x_1x_2x_3x_4$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4$
$\overline{x_1}\,x_2\overline{x_3}\,x_4$
$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$

$\overline{x_1}x_2x_3x_4$
$x_1\overline{x_2}x_3x_4$
$x_1x_2x_3\overline{x_4}$

$x_1x_2x_3x_4$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$$i = 0$$

$$PI = \emptyset$$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 0$

$PI = \emptyset$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4, x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m |\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verk\ddot{u}rzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 1$

$PI = \emptyset$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 1$

$PI = \emptyset$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$

$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 1 \qquad\qquad PI = \emptyset$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$
$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 =$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$

$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

$$L_2 =$$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_3\,x_4$

$\overline{x_2}x_3x_4$

$\overline{x_1}x_2x_4$

$x_1\overline{x_2}\,x_4$

$x_2x_3x_4$

$x_1x_3x_4$

$x_1x_2x_3$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$

$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

$$L_2 = \{x_3x_4\}$$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$

$\overline{x_1}\,x_3\,x_4$
$\overline{x_2}x_3x_4$
$\overline{x_1}x_2x_4$
$x_1\overline{x_2}\,x_4$

$x_2x_3x_4$
$x_1x_3x_4$
$x_1x_2x_3$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m |\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i\ |\ m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 1 \qquad\qquad PI = \emptyset$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

$$L_2 = \{x_3\,x_4\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 1 \qquad\qquad PI = \emptyset$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$
$\quad x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\}$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x{:}\{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 1$ $\qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$

$\qquad x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\}$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 2 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3\}$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

$$L_2 = \{x_3\,x_4\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 2 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3\}$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$$
$$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$$

$$L_2 = \{x_3\,x_4\}$$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 2 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$

$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\} \qquad L_3 =$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verk\text{ü}rzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 2 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$
$\quad x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\} \qquad L_3 = \emptyset$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m |\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verk\ddot{u}rzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 2$ $\qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$

$\qquad x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\}$ $\qquad L_3 = \emptyset$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 2 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3, x_3\,x_4\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$
$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\} \qquad L_3 = \emptyset$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 3 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3, x_3\,x_4\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$

$\qquad x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\} \qquad L_3 = \emptyset$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i \coloneqq 0; PI \coloneqq \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} \coloneqq \{m \mid \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI \coloneqq PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i \coloneqq i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 3 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3, x_3\,x_4\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$
$\quad x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\} \qquad L_3 = \emptyset$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0; PI := \emptyset$
2. $So\ lange\ L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m |\ \exists x: \{mx, m\bar{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad PI := PI \cup \{m \in L_i \mid m\ hat\ keine\ echte\ Verkürzung\ in\ L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. $Ausgabe\ PI$

Beispiel

$i = 3 \qquad PI = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}x_2x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_2x_3, x_3\,x_4\}$

$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4, \overline{x_1}x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4,$
$x_1\overline{x_2}x_3x_4, x_1x_2x_3\overline{x_4}, x_1x_2x_3x_4\}$

$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}x_3x_4, \overline{x_1}x_2x_4, x_2x_3x_4, x_1\overline{x_2}\,x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_3\}$

$L_2 = \{x_3\,x_4\} \qquad L_3 = \emptyset$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Willard van Orman Quine (1955)

Edward J. McCluskey (1956)

Algorithmus von Quine/McCluskey

- **Eingabe** Fkt. f als Liste aller Minterme zu einschlägigen Indizes
- **Ausgabe** Minimalpolynom zu f

Verfahren

1. Berechne PI, Menge aller Primimplikanten von f .
2. Berechne minimale f überdeckende Auswahl aus PI.

Schwieriges kombinatorisches Problem, nur heuristische Lösung mit gewissen Freiheitsgraden

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Das Überdeckungsproblem

Aufgabe Finde minimale Überdeckung von f mit PI.

PI-Tafel

- eine Zeile für jeden Primimplikanten
- eine Spalte für jede Eins-Eingabe

$$\text{Eintrag} = \begin{cases} 1 & \text{Primimplikant überdeckt Eins-Eingabe} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beobachtung

- PI-Tafel meist riesig groß
- verkleinern

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

PI-Tafel

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$			1	1												
$x_3\,x_4$				1				1				1				1
$\overline{x_1}x_2x_4$						1		1								
$x_1x_2x_3$															1	1
$x_1\overline{x_2}\,x_4$										1		1				

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Das Überdeckungsproblem

Verkleinerung der PI-Tafel

- Einsatz von **Verkleinerungsregeln**
- Freiheit durch
  - **Reihenfolge** der **Regelanwendung**
  - **Art** der **Regelanwendung**
- **Problem** Lösung oft trotzdem nicht ablesbar
- **Lösung** Backtracking oder Heuristiken

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

PI-Tafel Reihenfolge der Regeln

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$			1	1												
$x_3\,x_4$				1				1				1				1
$\overline{x_1}x_2x_4$						1		1								
$x_1x_2x_3$															1	1
$x_1\overline{x_2}\,x_4$										1		1				

Streichung von Kernimplikanten-Zeilen

- Wenn in einer Spalte nur genau eine 1 steht, heißt der zugehörige Implikant **Kernimplikant**. Er wird zur Überdeckung benutzt.
- Kernimplikant $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$ markiert (1), wird übernommen
- Zeile 1 wird gelöscht, Spalte 3 wird gelöscht

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

PI-Tafel Reihenfolge der Regeln

	0	1	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_3\ x_4$							1				1				1
$\overline{x_1} x_2 x_4$					1		1								
$x_1 x_2 x_3$														1	1
$x_1 \overline{x_2}\ x_4$									1		1				

Streichung von Kernimplikanten-Zeilen

- Wenn in einer Spalte nur genau eine 1 steht, heißt der zugehörige Implikant **Kernimplikant**. Er wird zur Überdeckung benutzt.
- Kernimplikant $\overline{x_1} x_2 x_4$ markiert (1), wird übernommen
- Zeile 2 wird gelöscht, Spalte 7 wird gelöscht

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

PI-Tafel Reihenfolge der Regeln

	0	1	2	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_3\ x_4$										1				1
$x_1 x_2 x_3$													1	1
$x_1 \overline{x_2}\ x_4$								1		1				

Streichung von Kernimplikanten-Zeilen

- Wenn in einer Spalte nur genau eine 1 steht, heißt der zugehörige Implikant **Kernimplikant**. Er wird zur Überdeckung benutzt.
- Kernimplikant $x_1 \overline{x_2}\ x_4$ markiert (1), wird übernommen
- Zeile 3 wird gelöscht, Spalte 11 wird gelöscht

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

PI-Tafel **Reihenfolge der Regeln**

	0	1	2	4	5	6	8	10	12	13	14	15
$x_3\ x_4$												1
$x_1 x_2 x_3$											1	1

Streichung von Kernimplikanten-Zeilen

- Wenn in einer Spalte nur genau eine 1 steht, heißt der zugehörige Implikant **Kernimplikant**. Er wird zur Überdeckung benutzt.
- Kernimplikant $x_1 x_2 x_3$ markiert (1), wird übernommen
- Zeile 2 wird gelöscht, Spalte 15 wird gelöscht

PI-Tafel Reihenfolge der Regeln

	0	1	2	4	5	6	8	10	12	13	14
$x_3\ x_4$											

Streichung von Kernimplikanten-Zeilen

- Alle einschlägigen Indizes überdeckt, Tabelle ist leer.

→ $f(x_1, \ldots, x_4) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3 \ \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \ \vee x_1 x_2 x_3 \ \vee x_1 \overline{x_2}\ x_4$

Das Überdeckungsproblem

Verkleinerung der PI-Tafel

- Einsatz von **Verkleinerungsregeln**
- Freiheit durch
  - **Reihenfolge** der **Regelanwendung**
  - **Art** der **Regelanwendung**
- **Problem** Lösung oft trotzdem nicht ablesbar
- **Lösung** Backtracking oder Heuristiken

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Kontrolle mittels KV-Diagramm

$f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

$0 = (0000)_2$
$1 = (0001)_2$
$2 = (0010)_2$
$3 = (0011)_2$
$4 = (0100)_2$
$5 = (0101)_2$
$6 = (0110)_2$
$7 = (0111)_2$
$8 = (1000)_2$
$9 = (1001)_2$
$10 = (1010)_2$
$11 = (1011)_2$
$12 = (1100)_2$
$13 = (1101)_2$
$14 = (1110)_2$
$15 = (1111)_2$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Kontrolle mittels KV-Diagramm

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit $(\underset{0}{0}, \underset{1}{0}, \underset{2}{1}, \underset{3}{1}, \underset{4}{0}, \underset{5}{1}, \underset{6}{0}, \underset{7}{1}, \underset{8}{0}, \underset{9}{1}, \underset{10}{0}, \underset{11}{1}, \underset{12}{0}, \underset{13}{0}, \underset{14}{1}, \underset{15}{1})$

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$0 = (0000)_2$
$1 = (0001)_2$
$2 = (0010)_2$
$3 = (0011)_2$
$4 = (0100)_2$
$5 = (0101)_2$
$6 = (0110)_2$
$7 = (0111)_2$
$8 = (1000)_2$
$9 = (1001)_2$
$10 = (1010)_2$
$11 = (1011)_2$
$12 = (1100)_2$
$13 = (1101)_2$
$14 = (1110)_2$
$15 = (1111)_2$

6.4 Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Kontrolle mittels KV-Diagramm

$f: \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit $(\underset{0}{0}, \underset{1}{0}, \underset{2}{1}, \underset{3}{1}, \underset{4}{0}, \underset{5}{1}, \underset{6}{0}, \underset{7}{1}, \underset{8}{0}, \underset{9}{1}, \underset{10}{0}, \underset{11}{1}, \underset{12}{0}, \underset{13}{0}, \underset{14}{1}, \underset{15}{1})$

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$\rightarrow f(x_1, \ldots, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \lor \overline{x_1}x_2x_4 \lor x_1x_2x_3 \lor x_1\overline{x_2}\,x_4$

6. Optimierung von Schaltnetzen

6. Optimierung von Schaltnetzen

1. Einleitung & Strukturierter Entwurf ✓
2. Algebraische Vereinfachung ✓
3. KV-Diagramme ✓
4. Algorithmus von Quine/McCluskey ✓
5. **Unvollständig definierte Funktionen**
6. Hazards

6.5 Unvollständig definierte Funktionen

Unvollständig definierte Funktionen

formal $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1, *\}$

Bedeutung $f(x) = *$ Funktionswert für x egal („don't care")

Problem Schaltnetz realisiert immer eine vollständig definierte boolesche Funktion

Definition

$f' : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ heißt Realisierung (oder auch Erweiterung) von $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1, *\}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \{0, 1\}^n : \begin{cases} f(x) & falls \quad f(x) \in \{0,1\} \\ \{0,1\} & sonst \end{cases}$$

6.5 Unvollständig definierte Funktionen

Wahl der Realisierung

Wunsch Finde Realisierung f' mit minimalem Minimalpolynom.

Zwei spezielle Realisierungen

- minimale Erweiterung f_0 von f

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x) & f(x) \in \{0, 1\} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

- maximale Erweiterung f_1 von f

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & f(x) \in \{0, 1\} \\ 1 & sonst \end{cases}$$

6.5 Unvollständig definierte Funktionen

Über extreme Erweiterungen

Beobachtungen

- Primimplikanten von f_0 sind keine echten Verkürzungen von Primimplikanten von f_1

- Primimplikanten von f_1 können echte Verkürzungen von Primimplikanten von f_0 sein

Warum?

- zusätzliche Einsen verkürzen Primimplikanten höchstens
- **aber** f_1 kann viel mehr Primimplikanten haben

6.5 Unvollständig definierte Funktionen

Minimalpolynome unvollständig definierter Funktionen

Algorithmus

1. Berechne Menge aller Primimplikanten $PI(f_1)$ zu f_1.
2. Berechne minimale Überdeckung von f_0 durch Monome aus $PI(f_1)$.

→ algorithmisch keine neuen Probleme

6. Optimierung von Schaltnetzen

1. Einleitung & Strukturierter Entwurf ✓
2. Algebraische Vereinfachung ✓
3. KV-Diagramme ✓
4. Algorithmus von Quine/McCluskey ✓
5. Unvollständig definierte Funktionen ✓
6. **Hazards**

6.6 Hazards

Hazards

- Abweichungen zwischen Modell und Realität
- ärgerlich, aber unvermeidlich
- gilt auch für technisch realisierte Schaltnetze

Zentrale Frage: Was passiert, wenn die Eingabe wechselt?

Antwort: Die Ausgabe kann wechseln.

Wunsch

- wenn f die Ausgabe wechselt, wechselt das Schaltnetz genau einmal seine Ausgabe
- wenn f die Ausgabe nicht wechselt, wechselt das Schaltnetz seine Ausgabe nicht

Realität

- Schaltnetz kann Ausgabe „zwischendurch" wechseln → **Hazard**.

6.6 Hazards

Hazards: Begriffe

Hazards sind

- statisch — Ausgabewert soll gleich bleiben, ändert sich aber.
- dynamisch — Ausgabewert soll sich ändern, ändert sich aber mehrfach.
- Funktionshazard — schon in der Funktionsdefinition enthalten
- Schaltungshazard — Hazard, der kein Funktionshazard ist, sondern durch die Wahl der Schaltung ensteht

6.6 Hazards

Statischer Funktionshazard

Definition

$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ hat **statischen Funktionshazard**, wenn es

$a = a_1 a_2 \ldots a_n \in \{0, 1\}^n$ und b= $b_1 b_2 \ldots b_n \in \{0, 1\}^n$ mit a $\neq$ b

und $f(a) = f(b)$ gibt, sowie c $= c_1 c_2 \ldots c_n \in \{0, 1\}^n$ mit

$c_i \in \{a_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $f(c) \neq f(a)$.

6.6 Hazards

Statischer Funktionshazard

Definition

$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ hat **statischen Funktionshazard**, wenn es

$a = a_1 a_2 \dots a_n \in \{0, 1\}^n$ und b$= b_1 b_2 \dots b_n \in \{0, 1\}^n$ mit $a \neq b$

und $f(a) = f(b)$ gibt, sowie $c = c_1 c_2 \dots c_n \in \{0, 1\}^n$ mit

$c_i \in \{a_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $f(c) \neq f(a)$.

Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	1			
1		1		

6.6 Hazards

Statischer Funktionshazard

Definition

$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ hat **statischen Funktionshazard**, wenn es

$a = a_1 a_2 \ldots a_n \in \{0,1\}^n$ und b= $b_1 b_2 \ldots b_n \in \{0,1\}^n$ mit $a \neq b$

und $f(a) = f(b)$ gibt, sowie $c = c_1 c_2 \ldots c_n \in \{0,1\}^n$ mit

$c_i \in \{a_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ und $f(c) \neq f(a)$.

Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$a = 000, f(a) = 1$

$b = 011, f(b) = 1$

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	1			
1		1		

6.6 Hazards

Statischer Funktionshazard

Definition

$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ hat **statischen Funktionshazard**, wenn es

$a = a_1 a_2 \ldots a_n \in \{0, 1\}^n$ und b= $b_1 b_2 \ldots b_n \in \{0, 1\}^n$ mit $a \neq b$

und $f(a) = f(b)$ gibt, sowie c $= c_1 c_2 \ldots c_n \in \{0, 1\}^n$ mit

$c_i \in \{a_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $f(c) \neq f(a)$.

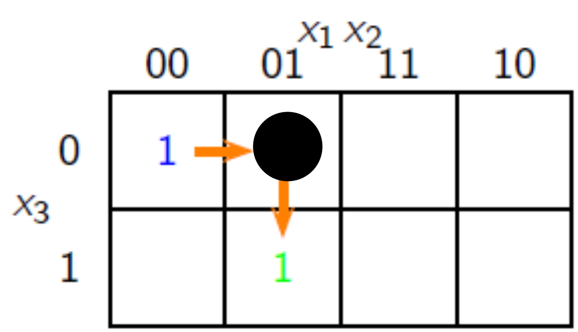
Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$a = 000, f(a) = 1$

$c = 010, f(c) = 0$

$b = 011, f(b) = 1$



6.6 Hazards

Dynamischer Funktionshazard

Definition

$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ hat **dynamischen Funktionshazard**, wenn es a, b $\in \{0, 1\}^n$ mit a $\neq$ b und $f(a) \neq f(b)$ gibt, sowie c $= c_1 c_2 \ldots c_n \in \{0, 1\}^n$ und c$' = c'_1 c'_2 \ldots c'_n \in \{0, 1\}^n$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $c'_i \in \{c_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $f(c) \neq f(a)$ und $f(c) \neq f(c')$.

6.6 Hazards

Dynamischer Funktionshazard

Definition

$f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ hat **dynamischen Funktionshazard**, wenn es a, b $\in \{0,1\}^n$ mit a $\neq$ b und $f(a) \neq f(b)$ gibt, sowie c $= c_1 c_2 \dots c_n \in \{0,1\}^n$ und $c' = c'_1 c'_2 \dots c'_n \in \{0,1\}^n$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $c'_i \in \{c_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1,2,\dots,n\}$ und $f(c) \neq f(a)$ und $f(c) \neq f(c')$.

Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	1		1	
1		1		

6.6 Hazards

Dynamischer Funktionshazard

Definition

$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ hat **dynamischen Funktionshazard**, wenn es a, b $\in \{0,1\}^n$ mit a $\neq$ b und $f(a) \neq f(b)$ gibt, sowie c $= c_1 c_2 \dots c_n \in \{0,1\}^n$ und c$' = c'_1 c'_2 \dots c'_n \in \{0,1\}^n$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $c'_i \in \{c_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $f(c) \neq f(a)$ und $f(c) \neq f(c')$.

Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$a = 000, f(a) = 1$

$b = 111, f(b) = 0$

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	1		1	
1		1	0	

6.6 Hazards

Dynamischer Funktionshazard

Definition

$f\colon\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ hat **dynamischen Funktionshazard**, wenn es a, b $\in \{0,1\}^n$ mit a $\neq$ b und $f(a) \neq f(b)$ gibt, sowie c $= c_1 c_2 \dots c_n \in \{0,1\}^n$ und $c' = c'_1 c'_2 \dots c'_n \in \{0,1\}^n$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $c'_i \in \{c_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1,2,\dots,n\}$ und $f(c) \neq f(a)$ und $f(c) \neq f(c')$.

Beispiel

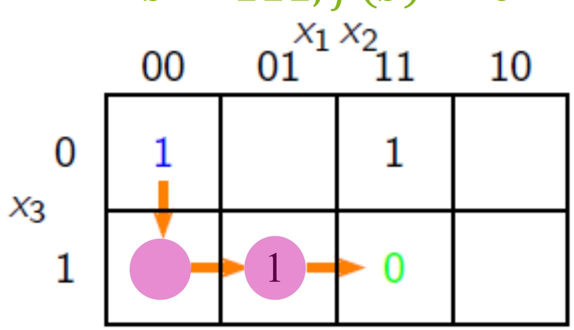
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$a = 000, f(a) = 1$

$c = 001, f(c) = 0$

$c' = 011, f(c') = 1$

$b = 111, f(b) = 0$



6.6 Hazards

Zusammenfassung: Statische/Dynamische Hazards

Wir haben korrektes Schaltnetz S für f .

Wir betrachten Eingabewechsel von a auf b.

1. Funktionswert bleibt gleich: $f(a) = f(b)$

   Am Ausgang von S liegt kurzzeitig ein anderer Wert an.

   statischer Hazard

2. Funktionswert ändert sich: $f(a) \neq f(b)$

   Am Ausgang von S ändert sich der Wert mehrfach.
   dynamischer Hazard

6.6 Hazards

Zusammenfassung: Statische/Dynamische Hazards

Wir haben korrektes Schaltnetz S für f .

Wir betrachten Eingabewechsel von a auf b.

1. Funktionswert bleibt gleich: $f(a) = f(b)$

   Am Ausgang von S liegt kurzzeitig ein anderer Wert an.

   statischer Hazard

2. Funktionswert ändert sich: $f(a) \neq f(b)$

   Am Ausgang von S ändert sich der Wert mehrfach.
   dynamischer Hazard

6.6 Hazards

Wie kommt es zum Funktionshazard?

Beobachtung Eingabewechsel von a nach b mit

entweder $f(a) = f(b)$ statisch

oder $f(a) \neq f(b)$ dynamisch

Es gibt **statisch**: 1 andere Eingabe c

dynamisch: 2 andere Eingaben c, c'

zwischen a und b, so dass der Funktionswert beim Weg von a nach b

- statisch über c wechselt
- dynamisch über c und c' mehrfach wechselt

zentral andere Eingaben echt „dazwischen"

6.6 Hazards

Was bedeutet „dazwischen“?

in Bezug auf Eingabewechsel

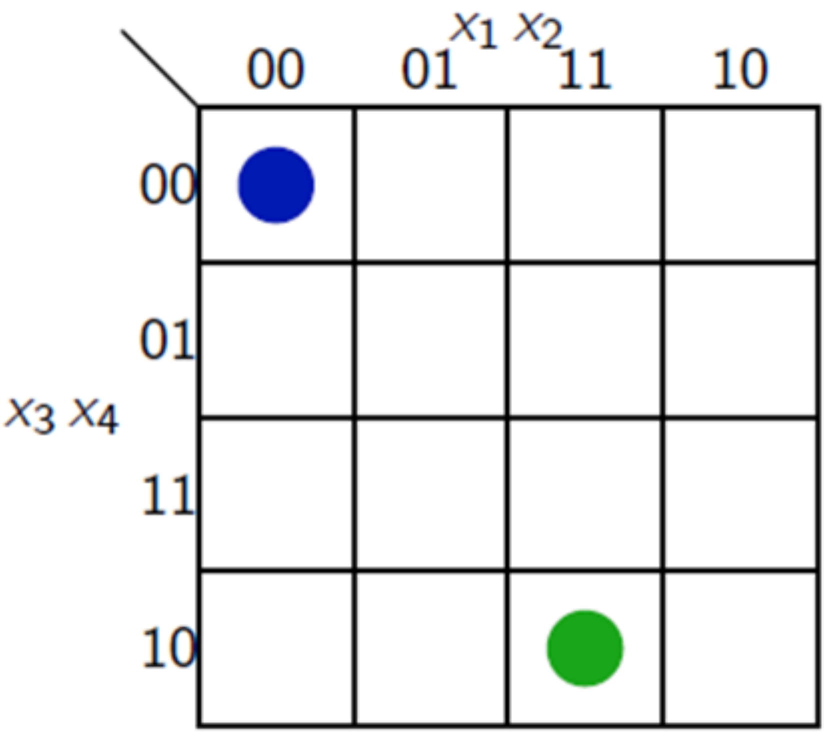
- Wertänderung einiger Eingabebits (alle Bits mit $a_i \neq b_i$)
- nicht völlig gleichzeitig
- also „dazwischen“ = kann als Zwischenschritt bei Wertänderung der Eingabebits vorkommen

beim Blick auf KV-Diagramm

- auf einem kürzesten Weg von a nach b

6.6 Hazards

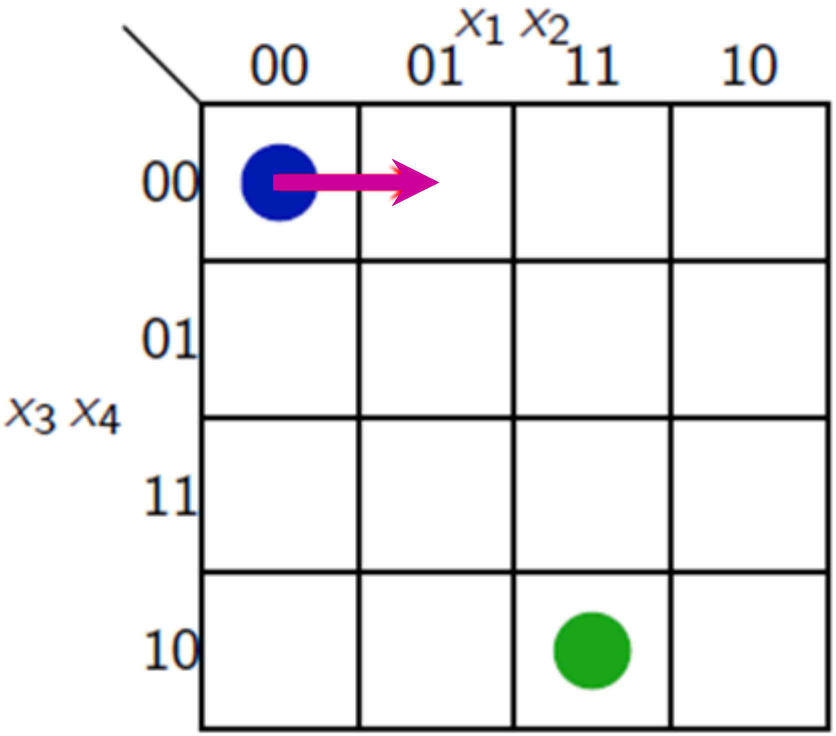
Kürzeste Wege im KV-Diagramm



$a = 0000$

$b = 1110$

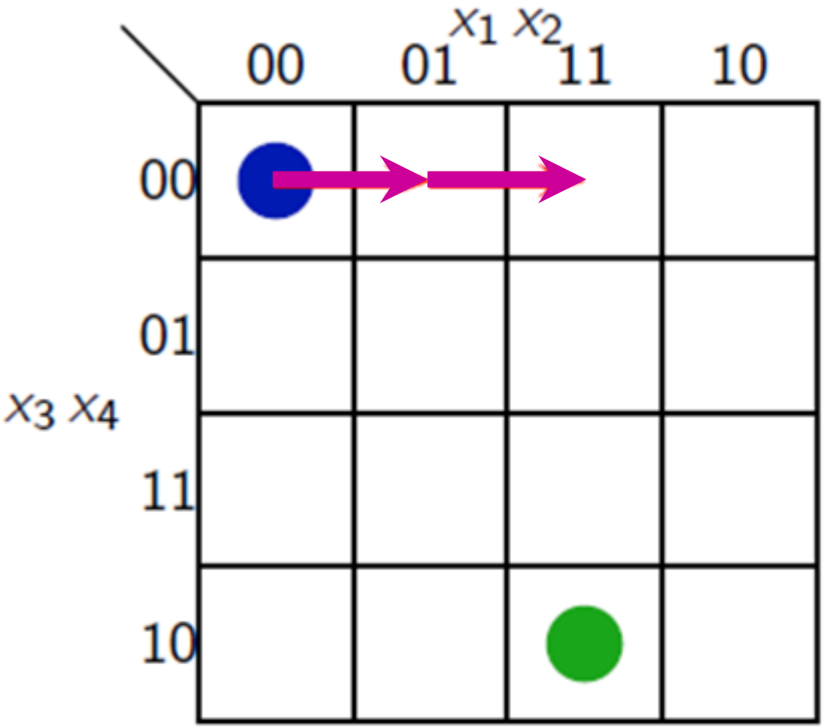
Kürzeste Wege im KV-Diagramm



$a = 0000$

$b = 1110$

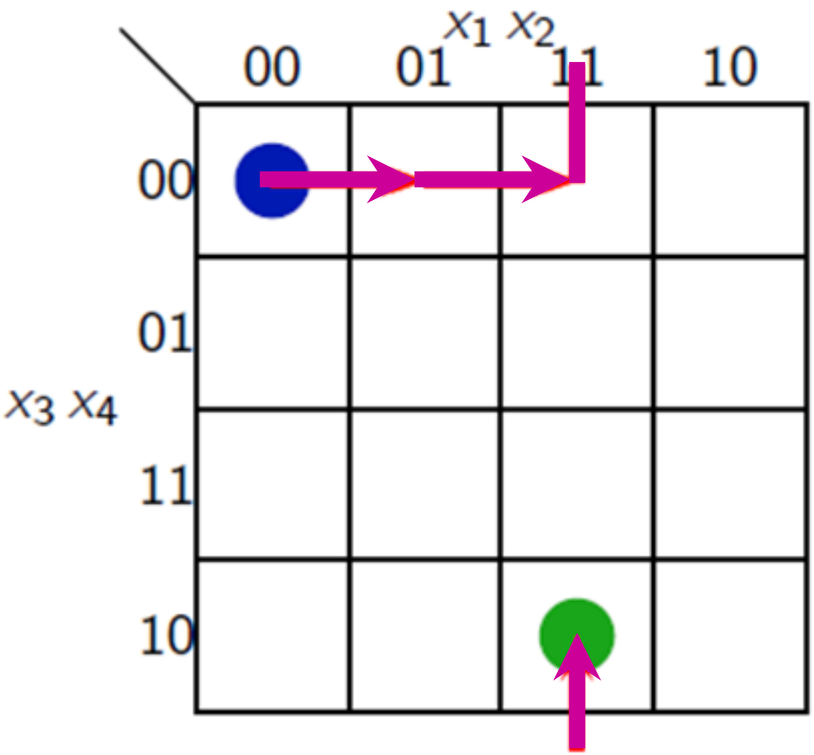
Kürzeste Wege im KV-Diagramm



$a = 0000$

$b = 1110$

Kürzeste Wege im KV-Diagramm

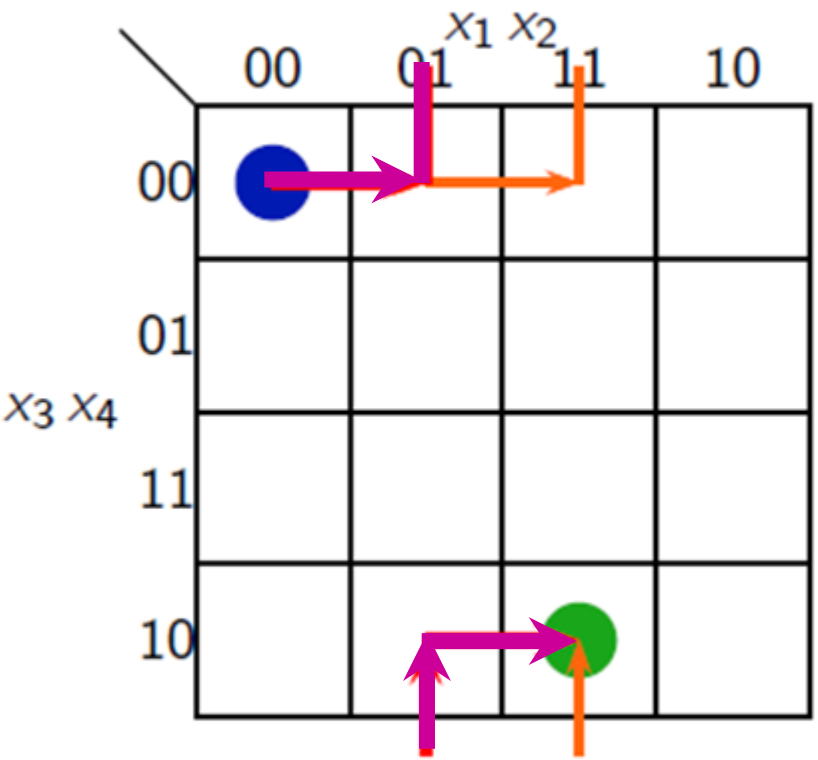


$a = 0000$

$b = 1110$

6.6 Hazards

Kürzeste Wege im KV-Diagramm

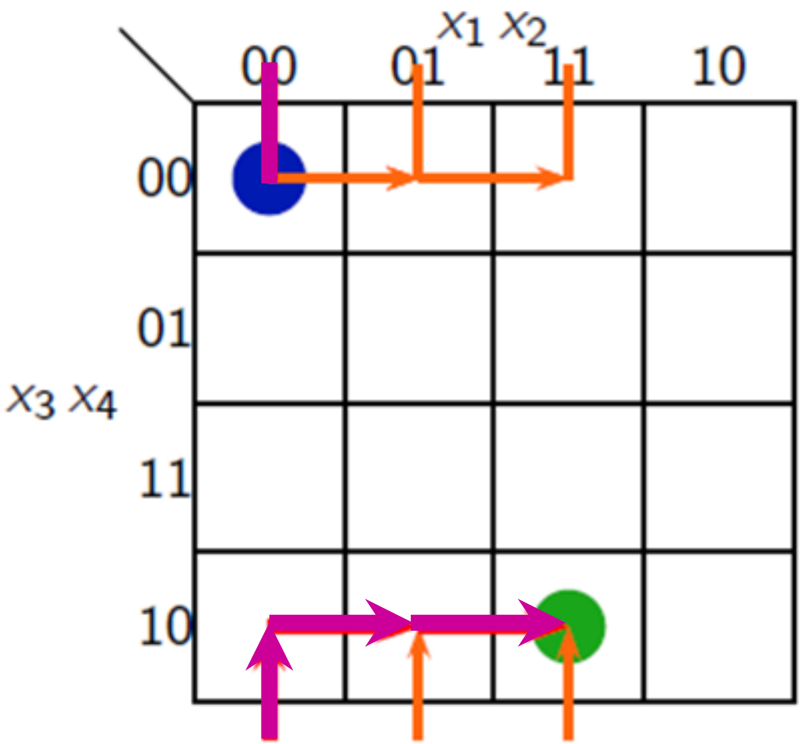


$a = 0000$

$b = 1110$

6.6 Hazards

Kürzeste Wege im KV-Diagramm

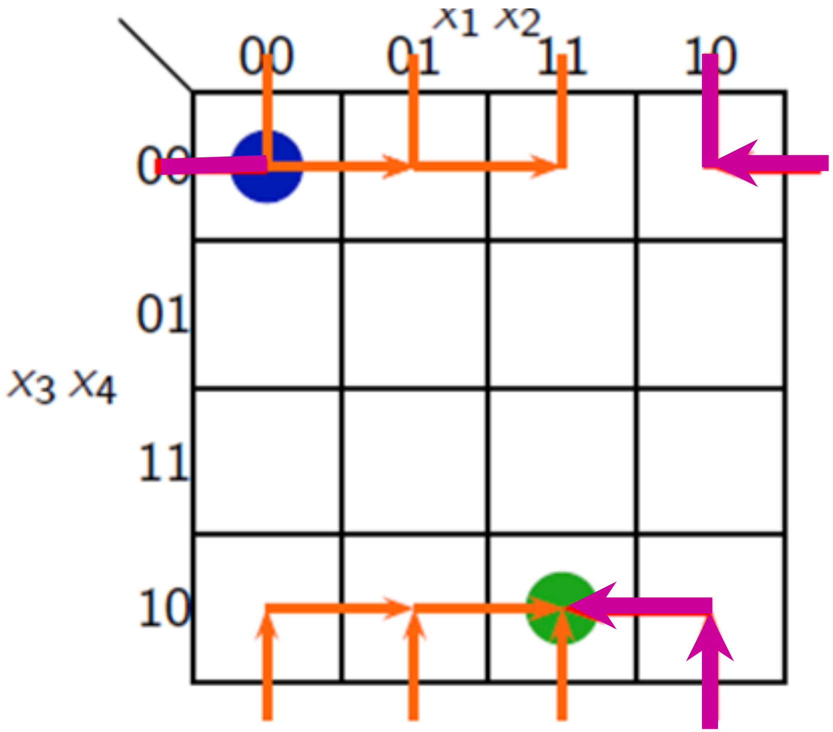


$a = 0000$

$b = 1110$

6.6 Hazards

Kürzeste Wege im KV-Diagramm

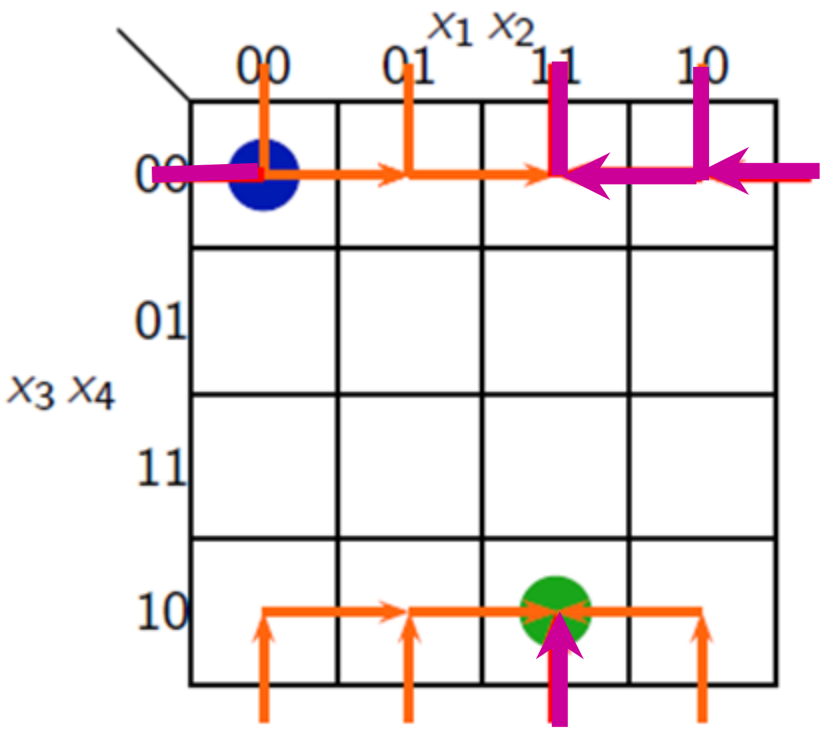


$a = 0000$

$b = 1110$

6.6 Hazards

Kürzeste Wege im KV-Diagramm

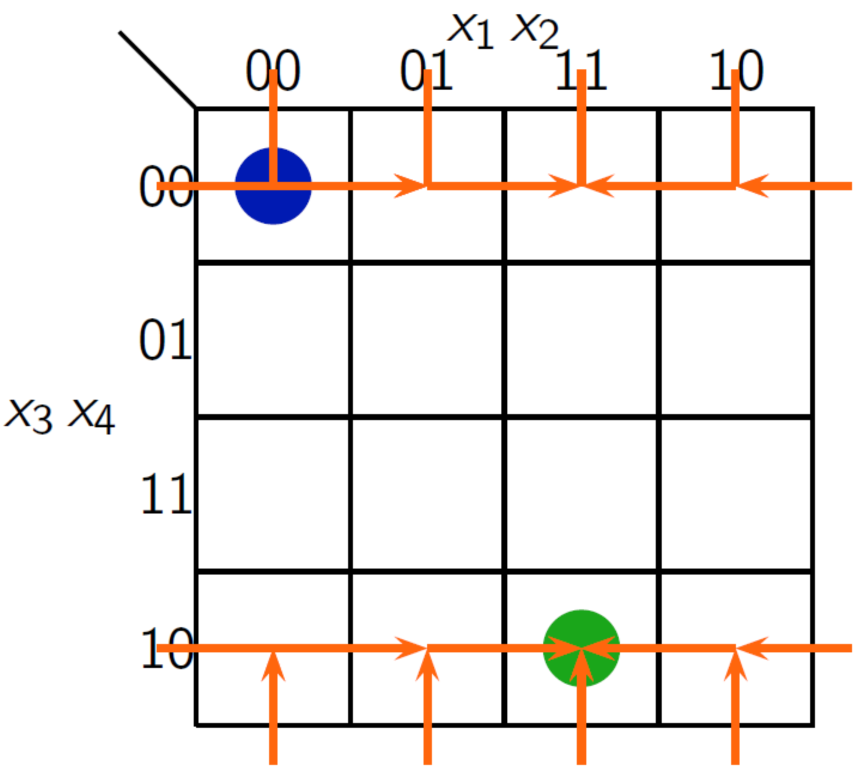


$a = 0000$

$b = 1110$

6.6 Hazards

Kürzeste Wege im KV-Diagramm



$a = 0000$

$b = 1110$

Beobachtung

- 3 Bits verschieden
- kürzeste Wege haben Länge 3
- (i.a.: n unterschiedliche Bits $\Rightarrow$ kürzeste Weglänge = n)

6.6 Hazards

Funktionshazards

Funktionshazards sind in Realisierungen von Schaltnetzen nicht zu vermeiden

zur Kenntnis nehmen	Es gibt Hazards.
für uns interessanter	Schaltungshazards

Definition

Schaltzungshazard

Funktion hat bezüglich a, b keinen Hazard, Schaltnetz aber schon

Fragen

1. Wie kann das passieren?
2. Kann man das vermeiden?

6.5 Unvollständig definierte Funktionen

Schaltzungshazard

Definition

Schaltnetz S für f hat einen **statischen Schaltungshazard**, wenn es a, b ∈ $\{0, 1\}^n$ gibt, so dass f bezüglich a, b keinen statischen Funktionshazard hat, aber beim Eingabewechsel von a nach b am Ausgang von S nicht notwendig stabil $f(a)$ anliegt.

6.6 Hazards

Schaltzungshazard

Definition

Schaltnetz S für f hat einen **statischen Schaltungshazard**, wenn es a, b ∈ $\{0, 1\}^n$ gibt, so dass f bezüglich a, b keinen statischen Funktionshazard hat, aber beim Eingabewechsel von a nach b am Ausgang von S nicht notwendig stabil $f(a)$ anliegt.

Definition

Schaltnetz S für f hat einen **dynamischen Schaltungshazard**, wenn es $a, b \in \{0,1\}^n$ gibt, so dass f bezüglich a, b keinen dynamischen Funktionshazard hat, aber beim Eingabewechsel von a nach b am Ausgang von S mehr als ein Funktionswertwechsel auftreten kann.

6.6 Hazards

Schaltzungshazard

Definition

Schaltnetz S für f hat einen **statischen Schaltungshazard**, wenn es a, b ∈ $\{0, 1\}^n$ gibt, so dass f bezüglich a, b keinen statischen Funktionshazard hat, aber beim Eingabewechsel von a nach b am Ausgang von S nicht notwendig stabil $f\ (a)$ anliegt.

Definition

Schaltnetz S für f hat einen **dynamischen Schaltungshazard**, wenn es $a, b \in \{0,1\}^n$ gibt, so dass f bezüglich a, b keinen dynamischen Funktionshazard hat, aber beim Eingabewechsel von a nach b am Ausgang von S mehr als ein Funktionswertwechsel auftreten kann.

Beachte: Auftreten nicht garantiert!

6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$a = 111, f(a) = 1$

$b = 101, f(b) = 1$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!

6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

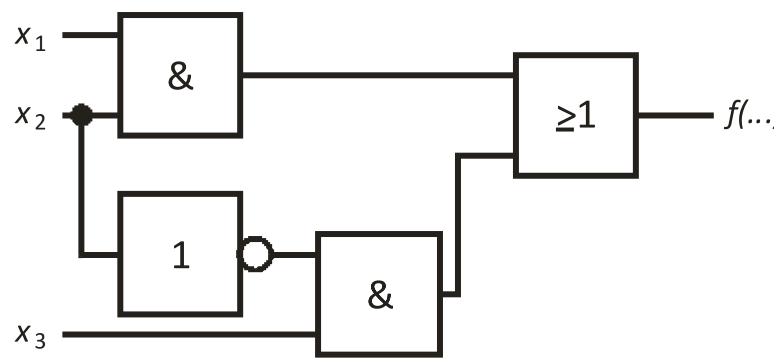
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$a = 111, f(a) = 1$

$b = 101, f(b) = 1$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

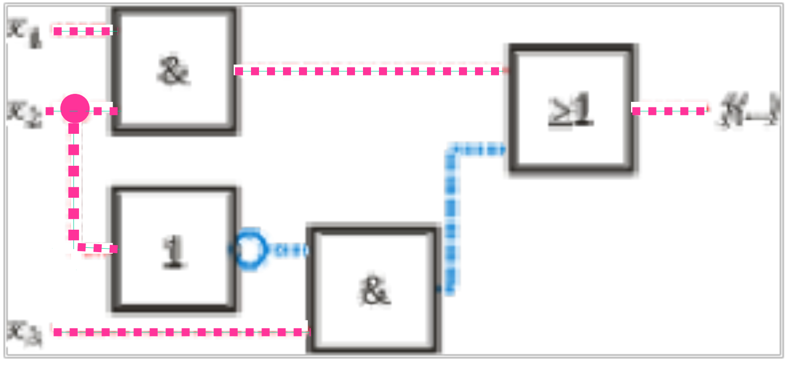
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$a = 111, f(a) = 1$

$b = 101, f(b) = 1$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

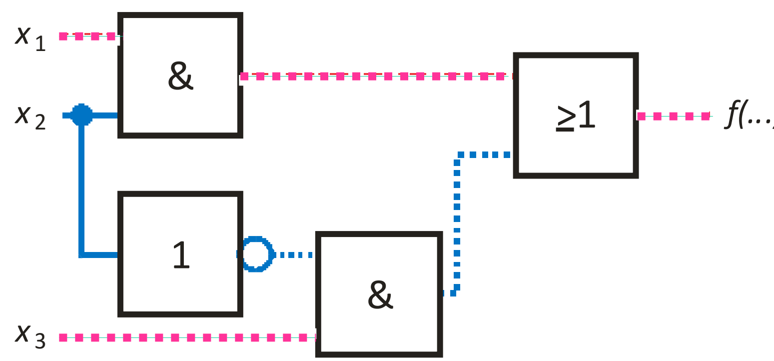
Beispiel statischer Schaltungshazard

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$a = 111, f(a) = 1$$
$$b = 101, f(b) = 1$$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

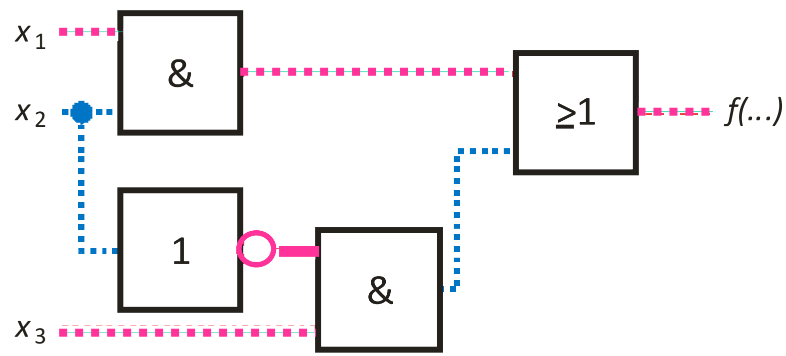
Beispiel statischer Schaltungshazard

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$a = 111, f(a) = 1$$
$$b = 101, f(b) = 1$$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

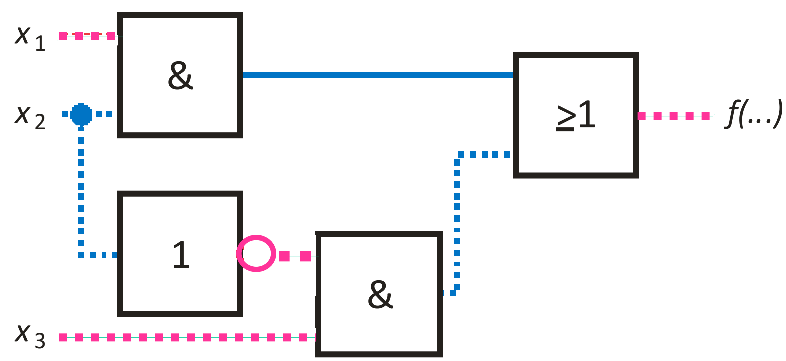
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$a = 111, f(a) = 1$

$b = 101, f(b) = 1$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

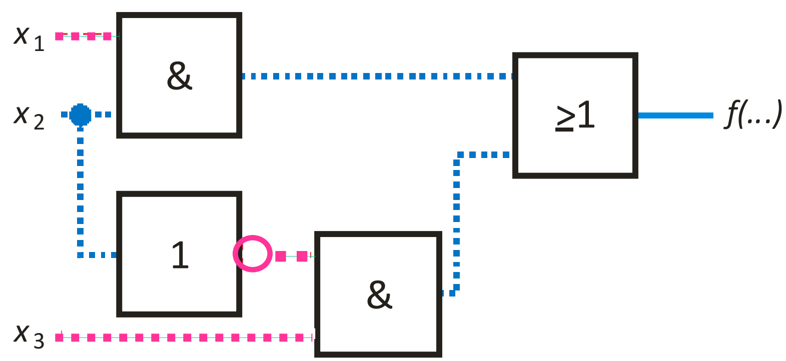
Beispiel statischer Schaltungshazard

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$a = 111, f(a) = 1$$
$$b = 101, f(b) = 1$$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

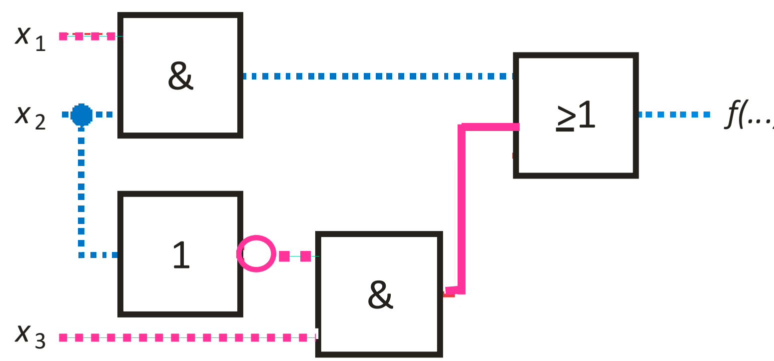
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$a = 111, f(a) = 1$

$b = 101, f(b) = 1$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

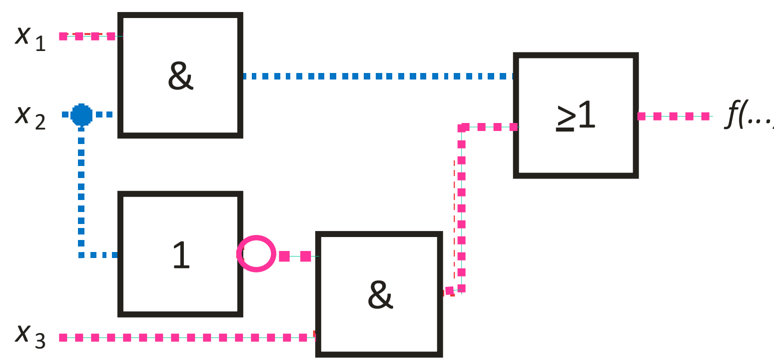
Beispiel statischer Schaltungshazard

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$a = 111, f(a) = 1$$
$$b = 101, f(b) = 1$$

Kein Funktionshazard, da kein c zwischen a und b existiert!



6.6 Hazards

Vermeidung von Schaltungshazards

Wir konzentrieren uns auf

- statische Schaltungshazards,
- Schaltnetze, die direkt Polynome realisieren.

Sind in solchen Schaltnetzen Schaltungshazards ganz vermeidbar?

- gute Nachricht ja
- schlechte Nachricht nicht kostenlos

Wie vermeidet man statische Schaltungshazards?

Satz von Eichelberger (1965)

Ein zweistufiges Schaltnetz S für eine boolesche Funktion f in disjunktiver Form ist frei von **statischen Schaltungshazards**, wenn die UND-Gatter von S in einer 1:1-Korrespondenz zu den Primimplikanten stehen, d. h.

- jedes UND-Gatter von S realisiert einen Primimplikanten von f
- und jedem Primimplikanten von f entspricht ein UND-Gatter in S.

6.6 Hazards

Wir beweisen diesen Satz für den Fall, dass eine Variable (hier x_n) ihren Wert ändert und das Resttupel $(x_1, \dots, x_{n-1})$ unverändert seinen Wert $(a_1, \dots, a_{n-1})$ behält.

Es gilt: f hat keinen Funktionshazard für den Wechsel der Eingangsbelegung von $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ nach $(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$.

Es gilt: $f(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$.

Zu zeigen: Während des Wechsels von $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ nach $(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$ für ein Schaltnetz S, dass alle Primplikanten durch UND-Gatter realisiert hat, ist kein Hazard zu beobachten.

Beweisidee: Wir unterscheiden die Fälle

- $f(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) = 1$
- $f(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) = 0$

6.6 Hazards

Beweis Fall 1: $f(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) = 1$

Offensichtlich gehören dann zu den Belegungen $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ und $(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$ zwei Minterme von f.

Die Belegung $(a_1, \dots, a_{n-1})$ entspricht dem zugehörigen Implikanten (Anwendung der Resolution). Dieser kann bereits Primimplikant sein.

Ansonsten existiert eine echte Verkürzung dieses Implikanten.

In beiden Fällen gibt es einen Primimplikanten, der x_n nicht enthält, und dem nach Voraussetzung ein UND-Gatter zugeordnet ist. Dieses Gatter wird auf den Wechsel von x_n nicht reagieren.

Dieses Gatter stellt sicher, das der Hazard am Ausgang nicht zu beobachten ist. □

6.6 Hazards

Beweis Fall 2: $f(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) = 0$

Dann sei m ein beliebiger Primimplikant von f und es gilt:

$$m(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = m(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) = 0$$

Das bedeutet, dass das UND-Gatter, das m entspricht seine Ausgabe nicht ändert, wenn x_n seinen Wert wechselt. Da m beliebig gewählt wurde, gilt dies für alle Primimplikanten von f.

Dies bedeutet, dass kein UND-Gatter auf den Wechsel von x_n reagiert und dieser Wechsel nicht am Ausgang von S beobachtet werden kann. $\square$

6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Was ist schiefgelaufen?

Minterme

- $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1x_2\overline{x}_3$
- $x_1x_2x_3$

Beispiel statischer Schaltungshazard

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Was ist schiefgelaufen?

Minterme

- $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1x_2\overline{x}_3$
- $x_1x_2x_3$

KV-Diagramm

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0				
1				

6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Was ist schiefgelaufen?

Minterme

- $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1x_2\overline{x}_3$
- $x_1x_2x_3$

KV-Diagramm

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

Beispiel statischer Schaltungshazard

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Was ist schiefgelaufen?

Minterme

- $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1x_2\overline{x}_3$
- $x_1x_2x_3$

KV-Diagramm

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

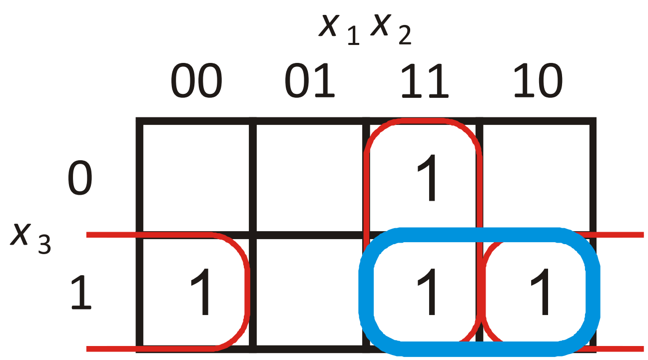
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Was ist schiefgelaufen?

Minterme

- $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1\overline{x}_2x_3$
- $x_1x_2\overline{x}_3$
- $x_1x_2x_3$

KV-Diagramm



Aufgestellte Regel: Minimale Menge von PI, die alle 1en überdecken reicht. Gelegentlich leider nur in der Theorie.

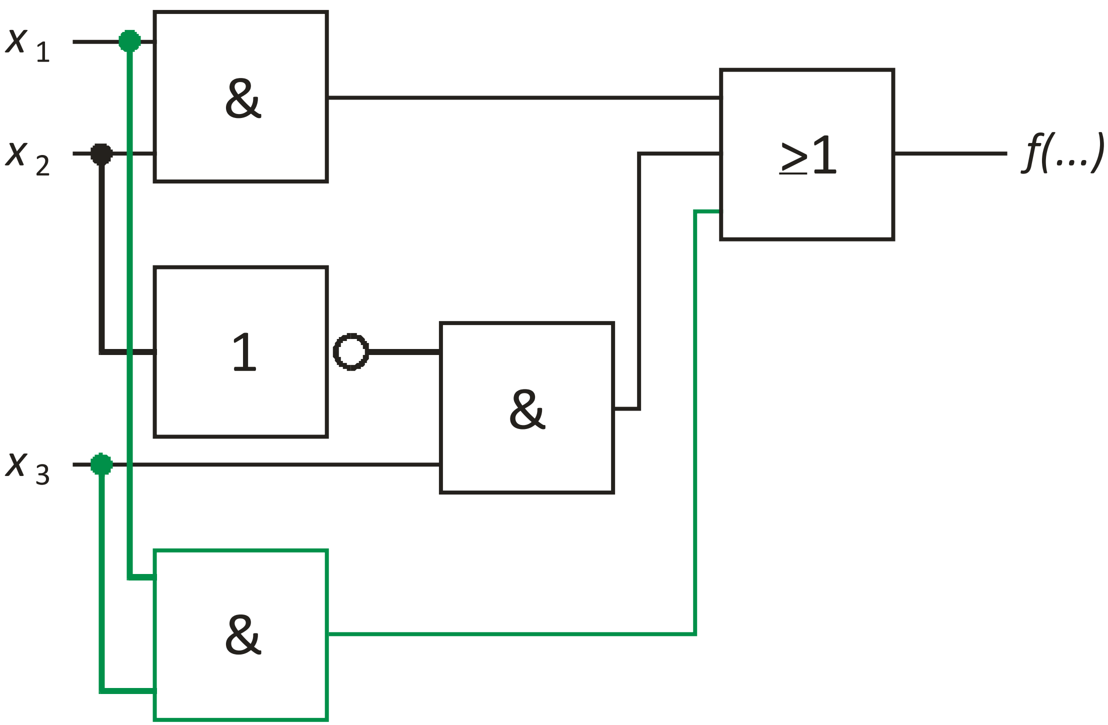
6.6 Hazards

Beispiel statischer Schaltungshazard

vorher: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3$

korrigiert: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_3$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



6.6 Hazards

Zusammenfassung: Hazards

Fazit Hazards

- Hazards sind ärgerlich

Wann liegt der richtige Funktionswert vor?

- Funktionshazards sind so nicht vermeidbar.
- Statische Schaltungshazards können mit zusätzlichem Aufwand vermieden werden.
- Eine grundsätzliche Lösung ist wünschenswert.

6.6 Hazards

Zusammenfassung: Hazards

Fazit Hazards

- Hazards sind ärgerlich

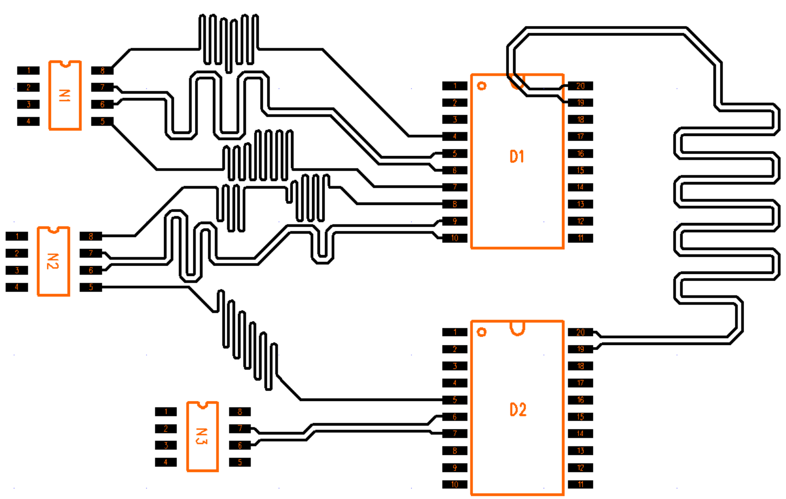
Wann liegt der richtige Funktionswert vor?

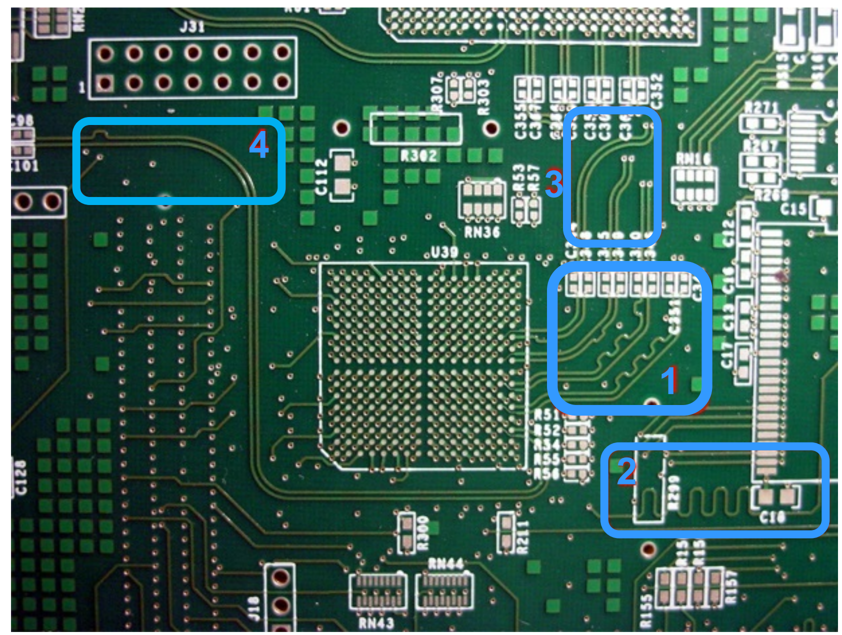
- Funktionshazards sind so nicht vermeidbar.
- Statische Schaltungshazards können mit zusätzlichem Aufwand vermieden werden.
- Eine grundsätzliche Lösung ist wünschenswert.

Mögliche grundsätzliche Lösung: Taktung der Schaltung $\Rightarrow$ später

Alternative Lösung

- falls Hazards nur aufgrund von Laufzeitdifferenzen der Gatter entstehen
- können Verlängerungen von Verbindungen diese Unterschiede ausgleichen.





6. Optimierung von Schaltnetzen

6. Optimierung von Schaltnetzen

1. Einleitung & Strukturierter Entwurf ✓
2. Algebraische Vereinfachung ✓
3. KV-Diagramme ✓
4. Algorithmus von Quine/McCluskey ✓
5. Unvollständig definierte Funktionen ✓
6. Hazards ✓